

2009 Kasım

www.guven-kutay.ch

MUKAVEMET DEĞERLERİ GERİLMELER

05-1

M. Güven KUTAY

İÇİNDEKİLER

1. PARÇADAKİ GERİLMELER.....	1.3
1.1. Çekmeye zorlanma, Çekme gerilmesi	1.4
1.1.1. Çekme gerilmesine örnekler	1.5
1.2. Basmaya zorlanma, basma gerilmesi.....	1.6
1.2.1. Basma.....	1.6
1.2.2. Yüzey ve cidar basıncı.....	1.8
1.2.3. Sürtünme kuvveti.....	1.11
1.2.4. Yuvarlak cisimlerde yüzey basması, Hertz basıncı	1.13
1.2.5. Burkulma (Flambaj)	1.15
1.2.6. Eğilmeye zorlanma, eğilme gerilmesi	1.21
1.2.7. Kesmeye zorlanma, kesme gerilmesi.....	1.25
1.3. Torsiyon, burulmaya zorlanma	1.27
1.4. Bileşik zorlanma	1.30
1.4.1. Genel.....	1.31
1.4.2. Bileşik zorlanma hipotezleri	1.45

1. PARÇADAKİ GERİLMELER

Makina parçasını etkileyen dış kuvvetlerin doğurduğu iç kuvvetler parçada gerilmeler oluşturur. Parçadaki bu gerilmeler işletmede ortaya çıkarlar. Bu gerilmeler kuvvetin zorlamasına göre değişirler ve kuvvetin ismiyle adlandırılırlar. Kuvvetin zorlama biçimi, mukavemetin statik dalında öğrenilen bilgilerle belirlenir ve hesaplanır. Statikte cisimler rijit olarak kabul edilir. Hakikatte hiçbir cisim rijit değildir. Dış kuvvetlerin etkisi altında bütün cisimler biçimlerini az veya çok değiştirirler. Cisimlerin bu biçim değiştirmeleri kuvvetin etkisi kalktıktan sonra, ya tamamen kalkar ve cisimler eski ilk durumlarını alırlar veya biçim değişikliği az veya çok kalır. Cisimlerin biçimlerini geçici olarak değiştirip tekrar eski biçimlerine dönmelerine "**elastik değişme**" denir. Cisimlerin biçimlerinin kalıcı değişimleri ise "**plastik değişme**" olarak adlandırılır. Biz burada yalnız elastik değişme, yani esneklik sınırları içinde oluşan, gerilme ve mukavemet hesaplarını inceleyeceğiz. Cisimlerin plastik değişmelerini, yani kalıcı şekil değişikliklerini mekanikte ayrıca geniş bir ilim dalı inceler. Cisimlerin kalıcı değişikliğini bilmek ve bunu bilinçli kullanabilmek, konstrüktör için çok büyük bir avantajdır. Hesaplarda kullanılacak karşılaştırma değerlerine bakarsak, bir taraftan en büyük gerilme, diğer taraftan en büyük biçim değiştirme (deformasyon) ana karşılaştırma değeri olarak kullanılır. Biz burada hesaplarımızda en büyük gerilme karşılaştırmasını göreceğiz ve kullanacağız. Çünkü; makina elemanlarının hesaplanmasında genelde hiç bir zaman esneklik sınırı aşılmaz. Burada genel mukavemet kanunlarına göre hesaplanan gerilmelere genelde "**nominal gerilme**" adı verilir.

Zorlanmalar

Yukarıda gördüğümüz gibi gerilme kuvvetin fonksiyonudur. Kuvveti zorlama durumlarına ayırdığımız göre, gerilmeye kuvvete göre adlandırılacaktır. Kuvvet parçayı çeşitli şekilde zorlayacaktır. Kuvvet parçayı zorladığına göre parçada zorlanacaktır. Böylece "**parçanın zorlanması**" veya kısaca "**zorlanmalar**" ortaya çıkar. Kuvvetin altı zorlama biçimine eşit olarak parçasında altı zorlanması vardır.

Böylece zorlanma biçimlerini sıralayacak olursak:

1. Çekmeye zorlanma
2. Basmaya zorlanma
 - Basma,
 - Yüzebasıncı ve cidar basıncı,
 - Burkulma (*Flambaj*).
3. Eğilmeye zorlanma
4. Kesmeye zorlanma
5. Burulmaya zorlanma, torsiyon
6. Bileşik zorlanma

Aşağıda bu zorlanmaları daha ayrıntılı ve anlaşılır biçimde inceliyelim.

1.1. Çekmeye zorlanma, Çekme gerilmesi

Çekmeye zorlanmaya kısaca "çekme" de denir. Gayet basit olarak bir çubuk düşünelim (Şek. 1.1). Bu çubuğu iki ucundan eksenine paralel ve teorik olarak çubuğun ekseninden etkileyecek biçimde karşıt yönlerde, aynı büyüklükte kuvvetlerle yükliyelim. Kabul ettiğimiz kesit yöntemine göre bu çubuktaki gerilmeyi hesaplamak istersek, çubuğun hesap yapılacak yerinden bir kesit almamız gerekecek. Bu kesiti eksene dik olarak alalım. Etkileyen dış kuvveti kesite getirelim. Böylece kesitte yalnız kesite dik olarak etki eden bir tek F iç kuvveti olacaktır. İç kuvvetlerin dengesine göre kesitte, bu aksiyon kuvvetine karşı aynı büyüklükte bir reaksiyon kuvveti oluşacaktır. Böylece bu kesitte "**çekme kuvveti çifti**" doğacaktır. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini bir birinden ayırmaya, yani bir birinden çekmeye zorlayacaktır. Bunun içinde parçanın bu zorlanma biçimine, kuvvette de olduğu gibi "**çekmeye zorlanma**" veya kısaca "**çekme**" adı verilir. Bir yüzeye dik olarak etki eden kuvvete normal kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeyede normal gerilme dediğimize göre, burada oluşan gerilmeye "normal gerilme" nin bir türüdür.

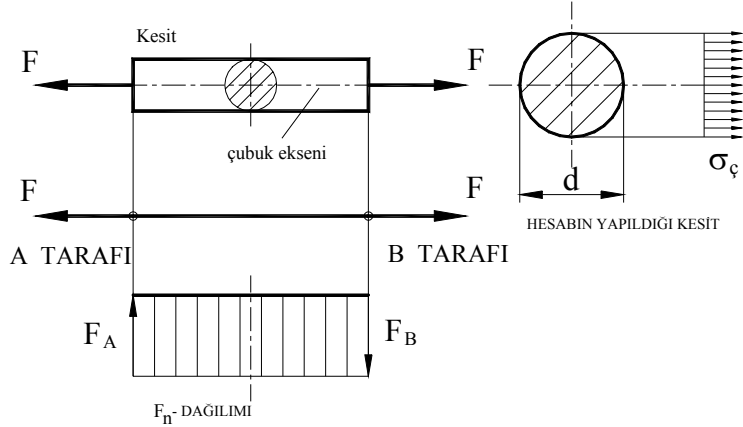
Bu gerilme biçimine pratikten örnek olarak halatları, zincirleri, civataları, çubukları, v.b. verebiliriz.

Burada oluşan gerilmeye "**çekme gerilmesi**" adı verilir ve mukavemet hesaplarında ve teknikte " σ_ζ " (*sigma indeks ç*) olarak gösterilir.

Bütün bu anlattıklarımızı formülle gösterelim :

$$F. 1 \quad \sigma_\zeta = \frac{F_n}{A} \leq \sigma_{\zeta EM}$$

$$F. 2 \quad S_{he} = \frac{\sigma_{\zeta SK}}{\sigma_\zeta} \geq S_{GER}$$

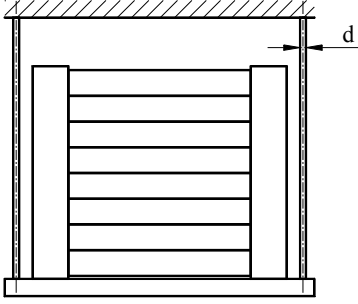


Şek. 1.1, Çekme gerilmesi

σ_ζ	N/mm ²	hesaplanan çekme gerilmesi
F_n	N	normal kuvvet
A	mm ²	kesit yüzeyi daire kesiti için $A = \pi d^2 / 4$ d daire çapı mm olarak
$\sigma_{\zeta EM}$	N/mm ²	malzemenin emniyetli çekme mukavemeti
S_{he}	1	hesaplanan emniyet katsayısı
S_{GER}	1	gerekli emniyet katsayısı
$\sigma_{\zeta SK}$	N/mm ²	malzemenin şekline göre çekme mukavemeti

1.1.1. Çekme gerilmesine örnekler

Ç12000 kg ağırlığındaki yükü, kendi ağırlığı 800 kg olan bir platforma yükleyelim (Şek. 1.2). Bu platform dört adet 15 mm çapındaki St60 dan yapılmış çubuklarla bir yere asılmış olsun. Bir çubuktaki çekme gerilmesi ne kadardır ?



Şek. 1.2, Asılı platform

$$\sigma_{\text{ç}} = F_n / A$$

$$F_n = (m_Y + m_{PL}) g / n$$

Yükün kütlesi	m_Y	=	2 000	kg
Platformun kütlesi	m_{PL}	=	800	kg
Yer çekimi ivmesi	g	=	9,81	m/s ²
Çubuk adedi	n	=	4	adet

Burada kuvvetin eşit olarak 4 çubuğa dağıldığını kabul edelim.

$$F_n = (2\,000 + 800) \cdot 9,81 / 4 = 6\,867 \text{ kgm/s}^2$$

$$A = \pi d^2 / 4 = \pi 15^2 / 4 = 176,714... \text{ mm}^2$$

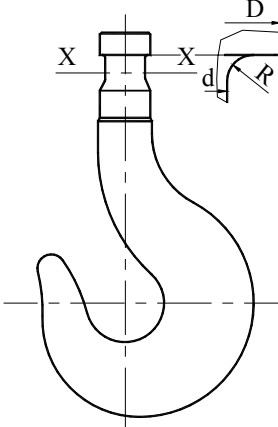
$$\sigma_{\text{ç}} = F_n / A = 6867 / 177 = 38,796...$$

$$\underline{F_n = 6867 \text{ N}}$$

$$\underline{A = 177 \text{ mm}^2}$$

Bir çubuktaki çekme gerilmesi $\sigma_{\text{ç}} = \underline{40 \text{ N/mm}^2}$ dir.

Ç2Aşağıda resmi görülen (Şek. 1.3) yük kancası St 50 den yapılmıştır. Kanca 15'000 kg yük için düşünülmektedir. X-X kesitinde kanca çapı $d = 45 \text{ mm}$ dir. Kancanın bu kesitinde çekme gerilmesi ne kadardır ?



Şek. 1.3, Yük kancası

$\sigma_{\text{ç}} = F_n / A$	$D = 55 \text{ mm}$
$F_n = m_Y g$	$R = 5 \text{ mm}$
Yükün kütlesi	$m_Y = 15\,000 \text{ kg}$
Yer çekimi ivmesi	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
$F_n = 15\,000 \cdot 9,81 = 147\,150 \text{ kgm/s}^2$	

$$\underline{F_n = 147\,150 \text{ N}}$$

$$A = \pi d^2 / 4 = \pi 45^2 / 4 = 1\,590,431... \text{ mm}^2$$

$$\underline{A = 1\,590 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_{\text{ç}} = F_n / A = 147\,150 / 1\,590 = 92,547...$$

Kancanın X-X kesitindeki çekme gerilmesi $\sigma_{\text{ç}} = \underline{95 \text{ N/mm}^2}$ dir.

1.2. Basmaya zorlanma, basma gerilmesi

1.2.1. Basma

Basmaya zorlanmaya kısaca "**basma**" da denir. Gayet basit olarak bir çubuk düşünelim (Şek. 1.4). Bu çubuğu iki ucundan eksenine paralel ve teorik olarak çubuğun ekseninden etkileyecek biçimde, karşıt yönlerde, içeriye doğru aynı büyüklükteki kuvvetlerle yükleyelim. Kabul ettiğimiz kesit yöntemine göre bu çubuktaki gerilmeyi hesaplamak istersek, çubuğun hesap yapılacak yerinden bir kesit almamız gerekecek. Bu kesiti eksene dik olarak alalım. Etkileyen dış kuvveti kesite getirelim. Böylece kesitte yalnız kesite dik olarak etki eden bir tek F iç kuvveti olacaktır. İç kuvvetlerin dengesine göre kesitte bu aksiyon kuvvetine karşı aynı büyüklükte bir reaksiyon kuvveti oluşacaktır. Böylece kesitte "**basma kuvvet çifti**" doğar. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini birbirine doğru itmeye, yani bir birine doğru basmaya zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlanma biçimine kuvvette de olduğu gibi parçada "**basmaya zorlanma**" veya kısaca "**basma**" adı verilir. Bir yüzeye dik olarak etki eden kuvvete normal kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeyede normal gerilme dediğimize göre burada oluşan gerilmeye "**normal gerilme**" nin bir türüdür.

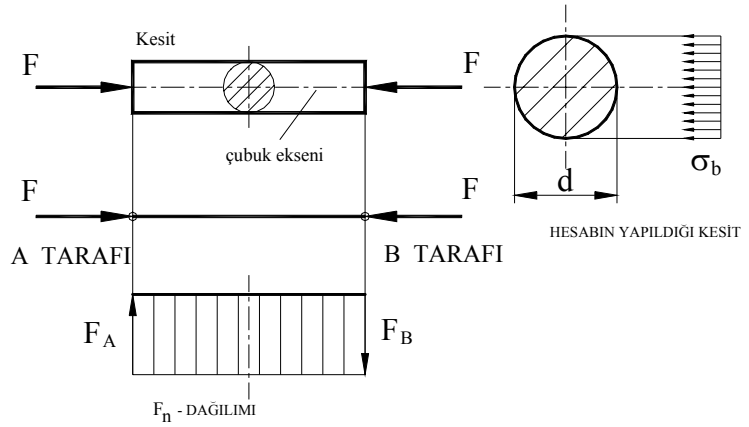
Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak sütunları, yatak altlıklarını, basıya zorlanan çubukları, v.b. verebiliriz.

Burada oluşan gerilmeye "**basma gerilmesi**" adı verilir ve mukavemet hesaplarında ve teknikte " σ_b " (*sigma indeks b*) olarak gösterilir.

Bütün bu anlattıklarımızı formülle gösterelim :

$$F. 3 \quad \sigma_b = \frac{F_n}{A} \leq \sigma_{BEM}$$

$$F. 4 \quad S_{he} = \frac{\sigma_{BSK}}{\sigma_b} \geq S_{GER}$$

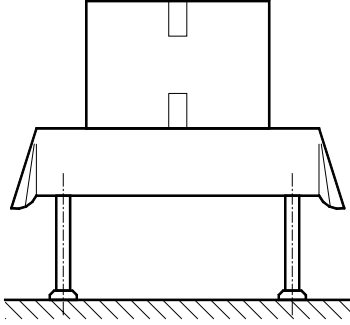


Şek. 1.4, Basma gerilmesi

σ_b	N/mm^2	hesaplanan basma gerilmesi
F_n	N	normal kuvvet
A	mm^2	kesit yüzeyi daire kesiti için $A = \pi d^2 / 4$ d daire çapı mm olarak
σ_{BEM}	N/mm^2	malzemenin emniyetli basma mukavemeti
S_{he}	1	hesaplanan emniyet katsayısı
S_{GER}	1	gerekli emniyet katsayısı
σ_{BSK}	N/mm^2	malzemenin şekline göre basma mukavemeti

1.2.1.1. Basma gerilmesine örnekler

B1 Mutfağınızdaki portatif yemek masasının üzerine (Şek. 1.5) yeni aldığınız televizyonunuzu geçici olarak koyduğunuzu düşünelim. Televizyonunuz ambalajıyla beraber ağırlığı 70 kg. Masanın ayakları: 25/20 mm, St 33 boru, kromajlı. Masa tablasının ağırlığı 10 kg. Ayaklardaki maksimum basma gerilmesi nekadardır? Mutfaktaki masanın ayakları ile portal vinçin sütunları arasında pek fark yoktur.



Şek. 1.5, Mutfak masası

$$\sigma_b = F_n / A$$

$$F_n = (m_{TV} + m_{MT}) g / n$$

TV nin kütlesi $m_{TV} = 70$ kg
 Masa tablasının kütlesi $m_{PL} = 10$ kg
 Yer çekimi ivmesi $g = 9,81$ m/s²
 Masa ayaklarının adedi $n = 3$ adet

Burada maksimum gerilim aranmaktadır. Ya masanın konstruksiyonundan veya Mutfağın tabanının tam düz olmamasından dolayı üç ayağın yere değdiği kabul edilir.

$$F_n = (70 + 10) 9,81 / 3 = 261,6 \text{ kgm/s}^2$$

$$A = \pi (D^2 - d^2) / 4 = \pi (25^2 - 20^2) / 4 = 176,714.. \text{ mm}^2$$

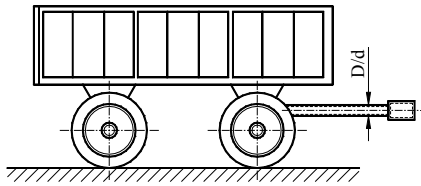
$$\sigma_b = F_n / A = 262 / 177 = 1,480...$$

$$\frac{F_n = 262 \text{ N}}{A = 177 \text{ mm}^2}$$

Masanın bir ayağındaki basma gerilmesi $\sigma_b = \underline{1,5 \text{ N/mm}^2}$ dir.

B2Aşağıda (Şek. 1.6) görülen kamyon romorkunu bağlayan şaftta, kamyon düz alanda geriye doğru hareket ederken, maksimum basma gerilmesi ne kadardır ?

Romorkun maksimum ağırlığı $m_R = 12$ t
 Sürtünme katsayısı (rulman yatak) $\mu = 0,05$
 Şaft (boru) $D/d = 60/48$ mm, St 50-2
 Yerçekimi ivmesi $g = 9,81$ m/s²



Şek. 1.6, Kamyon romorku

$$\sigma_b = F_n / A$$

$$F_n = F_{sür} = m_R g \mu = 12000 \cdot 9,81 \cdot 0,05$$

$$F_{sür} = 5886 \text{ kgm/s}^2 \quad \underline{F_n = 5886 \text{ N}}$$

$$A = \pi (D^2 - d^2) / 4 = \pi (60^2 - 48^2) / 4 =$$

$$1017,876... \text{ mm}^2 \quad \underline{A = 1018 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_b = F_n / A = 5886 / 1018 = 5,7819...$$

Şafttaki basma gerilmesi $\sigma_b = \underline{6 \text{ N/mm}^2}$ dir.

1.2.2. Yüzey ve cidar basıncı

Karşılıklı birbirine dokunan ve bu dokunmaları bir kuvvet altında olan iki cisimin birbirlerine dokundukları yüzeylerinde basma zorlanması oluşur. Bu zorlanma cismin içindeki kesit yüzeyinde olduğu gibi bu dokunma yüzeylerinde de gerilme oluşturur. Bu gerilme "**yüzey basıncı**" denir. Bu gerilme, basma gerilmesinin bir başka türüdür ve pratikte aynı biçimde hesaplanır.

Düz dokunma yüzeylerinde, hernekadar etki eden kuvvet bütün yüzeye aynı büyüklükte dağılmıyorsa, pratikte kuvvet dağılımı, sanki bütün yüzeye aynı oranda dağılıyormuş gibi kabul edilir (Şek. 1.7) ve hesaplar buna göre yapılır.

Kesiti daire şeklinde olan (Şek. 1.8) ve birbirine dokunan cisimlerde, örneğin: perçinler, civatalar, miller, akslar v.b. yüzey basıncı aynı zamanda "**cidar basıncı**" olarak adlandırılır. Bu iç içe geçen cisimlerin aralarındaki boşluk büyüdükçe dokunma yüzeyi küçülür ve buna karşit yüzey basıncı büyür.

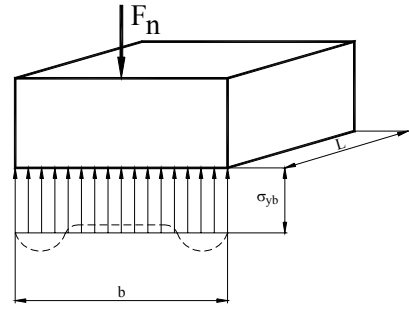
Burada etki eden kuvvetler yüzeye dik ve diğer deyişle normal kuvvet olduklarından, oluşturdukları gerilmelerde normal gerilmedir. Burada oluşan gerilmeye "**yüzey basıncı**" veya "**cidar basıncı**" adı verilir ve mukavemet hesaplarında ve teknikte " σ_{yb} veya σ_{bc} " (*sigma indeks yb veya sigma indeks cb*) olarak gösterilir.

Bütün bu anlattıklarımızı formülle gösterelim:

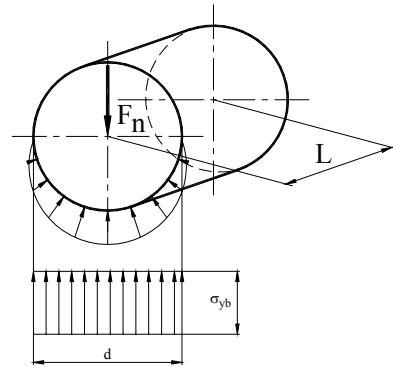
$$F. 5 \quad \sigma_{yb} = p_{he} = \frac{F_n}{A \text{ veya } A_{iz}} \leq \sigma_{BYEM} \text{ veya } p_{EM}$$

$$F. 6 \quad S_{he} = \frac{\sigma_{YBEM}}{\sigma_{yb}} \geq S_{GER}$$

σ_{yb}	N/mm ²	hesaplanan yüzey basıncı
p_{he}	N/mm ²	hesaplanan yüzey basıncı
F_n	N	normal kuvvet
A	mm ²	dokunma alanı $A = b.L$ b en, L boy, mm olarak
A_{iz}	mm ²	izdüşüm alanı, $A = d.L$ d çap, L boy, mm olarak
S_{he}	1	hesaplanan emniyet katsayısı
S_{GER}	1	gerekli emniyet katsayısı
σ_{BYEM}	N/mm ²	malzemenin emniyetli yüzey basıncı mukavemeti
p_{EM}	N/mm ²	malzemenin emniyetli yüzey basıncı mukavemeti



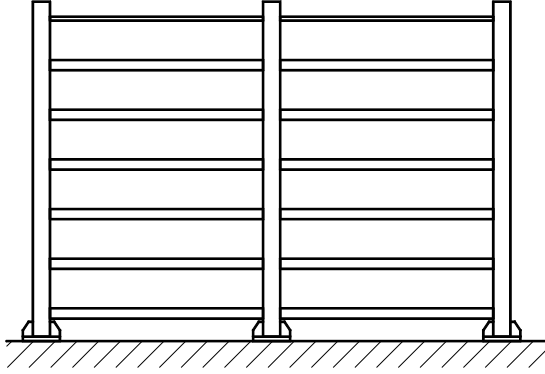
Şek. 1.7, Düz dokunma yüzeyinde basma



Şek. 1.8, Silindirde basma, cidar basıncı

1.2.2.1. Yüzey basıncı için örnekler

YB1 Şekilde görüldüğü gibi (Şek. 1.9), rafın bir bölümüne maksimum 1 ton yük konulabilirse, resimde görülen çok bölümlü raf ayaklarındaki yüzey basıncı ne kadardır? Resimde görülen her ayak ön ve arka olmak üzere iki adet sayılacaktır. Konstruksiyonun



Şek. 1.9, Çok bölümlü raf

esnek olduğu düşünülüp, yük bütün ayaklara tam ve eşit olarak dağılmış kabul edilecektir.

Ayaklar 6 cm x 6 cm lik plâkalarla yere basmaktadır.

$$p_{he} = F_n / A$$

$$F_n = n_{raf} m_{raf} g / n_{ayak}$$

$$\text{Raf sayısı} \quad n_{raf} = 12$$

$$\text{Bir raftaki yük} \quad m_{raf} = 1000 \text{ kg}$$

$$\text{Yer çekimi ivmesi} \quad g = 9,81 \text{ kgm/s}^2$$

$$\text{Ayak sayısı} \quad n_{ayak} = 6$$

$$A = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ mm}^2$$

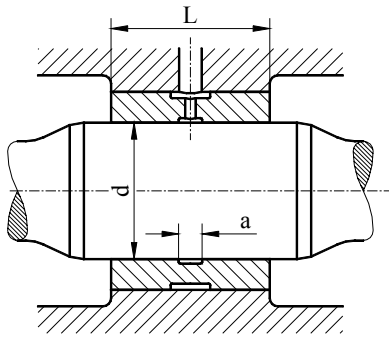
$$F_n = 12 \cdot 1000 \cdot 9,81 / 6 = 19620 \text{ kgm/s}^2$$

$$F_n = 19620 \text{ N}$$

$$p_{he} = 19620 / 3600 = 5,45 \text{ N/mm}^2$$

Bir ayaktaki yüzey basıncı $p_{he} = \underline{\underline{6 \text{ N/mm}^2}}$ dir.

YB2 Şekilde (Şek. 1.10) gösterilen kaygan yatağa maksimum 7,6 kN normal yatak kuvveti etki etmektedir. Konstruksiyonun kendi ağırlığı hesaba katılmadan yataktaki yüzey basıncını hesaplayınız.



Şek. 1.10, Kaygan yatak

$$d = 30 \text{ mm} ; L = 40 \text{ mm} ; a = 8 \text{ mm}$$

$$p_{he} = F_n / A$$

$$F_n = 7600 \text{ N}$$

$$A = d L = 30 \cdot (40 - 8) = 960 \text{ mm}^2$$

$$p_{he} = 7600 / 960 = 7,916.. \text{ N/mm}^2$$

Yatakdaki yüzey basıncı $p_{he} = \underline{\underline{8 \text{ N/mm}^2}}$ dir.

Dikkat:

Literatürde kaygan yataklarda emniyetli yüzey basıncı hakkında hiçbir veri bulunmamaktadır. Kaygan yataklardaki emniyetli yüzey basıncı deneylerle belirlenir.

Eğer literatürde verilmiş değer varsa, bu değerler düşük kayma hızı içindir.

1.2.3. Sürtünme kuvveti

Dokunma yüzeylerindeki basma kuvvetinin etkisiyle, yüzeyde sürtünme kuvveti oluşur.

Tutuk sürtünme veya hareketsiz cisimlerde sürtünme

Cisimler hareket etmesede yüzeyler arasında bir tür kuvvet oluşur. Bu kuvvete "**tutuk sürtünme kuvveti**" denir (Şek. 1.11). Bu kuvvet birbirlerine dokunan parçalarda ve yüzeylerinde hiçbir şekilde gerilme oluşturmaz.

$$F. 7 \quad F_0 = \mu_0 \cdot F_n$$

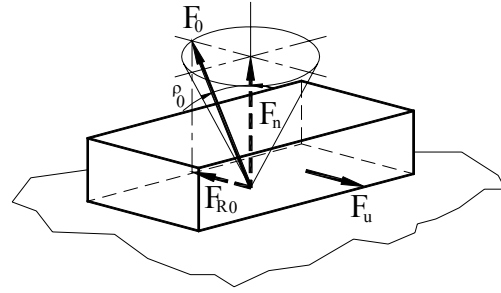
$$F. 8 \quad F_0 = \tan \rho_0 \cdot F_n$$

F_0 N tutuk sürtünme kuvveti

μ_0 1 tutuk sürtünme katsayısı

ρ_0 ° tutuk sürtünme açısı

F_n N normal kuvvet



Şek. 1.11, Tutuk sürtünme

Kayma sürtünmesi

Cisimler hareket edince, yüzeyler arasında oluşan sürtünme kuvvetine "**kayma sürtünme kuvveti**" denir (Şek. 1.12). Bu kuvvet birbirine dokunan parçalarda ve yüzeylerinde hiçbir şekilde gerilme oluşturmaz.

$$F. 9 \quad F_{sür} = \mu \cdot F_n$$

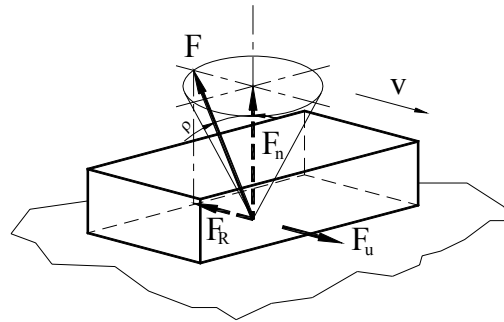
$$F. 10 \quad F_{sür} = \tan \rho \cdot F_n$$

$F_{sür}$ N kayma sürtünme kuvveti

μ 1 kayma sürtünme katsayısı

ρ ° kayma sürtünme açısı

F_n N normal kuvvet

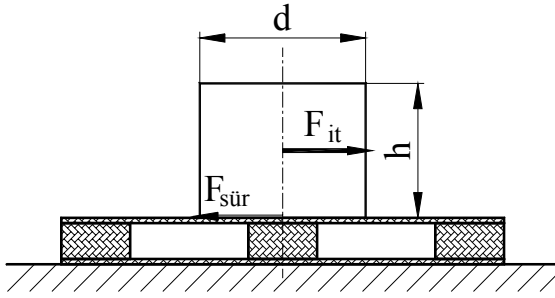


Şek. 1.12, Kayma sürtünmesi

1.2.3.1. Sürtünme kuvveti için örnekler

S1 Aşağıdaki şekilde (Şek. 1.13) görülen ağaç palet üzerine konulmuş silindirik biçimindeki demir parçasını, ağaç palet üzerinde sürterek itebilmek için ne kadar kuvvet gereklidir ?

Tutuk sürtünme katsayısı $\mu = 0,4$
 Demirin özgül ağırlığı $\rho = 7,85 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
 Demir silindirin çapı $d = 350 \text{ mm}$
 Demir silindirin yüksekliği $h = 300 \text{ mm}$



Şek. 1.13, Ağaç palet

$$F_{it} = F_{sür}$$

$$F_{sür} = \mu F_n$$

$$F_n = m_{demir} g$$

$$m_{demir} = \rho V$$

$$V = \pi d^2 h / 4$$

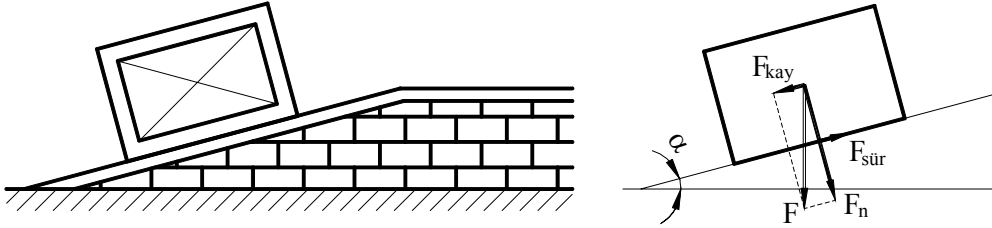
Böylece itme kuvvetini şu biçimde yazabiliriz:

$$F_{it} = \mu \rho \pi d^2 h g / 4$$

Bu değerleri yerleştirirsek: $F_{it} = 0,4 \cdot 7,85 \cdot 10^{-6} \cdot 350^2 \cdot 300 \cdot 9,81 / 4 = 283,006...$

Demir silindiri itebilmek için minimum 283 N kuvvet gereklidir.

S2 Şekilde görülen (Şek. 1.14) taştan yapılmış $\alpha = 15$ derece eğimli rampaya konulan 1 ton ağırlığındaki çelik konstruksiyon kayar mı ?



Şek. 1.14, Rampa

$F_{kay} = \tan \alpha F_n$; $F_{sür} = \mu F_n$ Eğer $F_{kay} > F_{sür}$ ise kayar.

Burada her ne kadar tutuk sürtünme varsada işi garantiye almak için kayma sürtünmesi değerleri alınır. $\tan \alpha > \mu$ ise kayar , yoksa $F_{kay} < F_{sür}$ ise kaymaz.

Bu karşılaştırmayı bu örneğe uygularsak: $\tan 15^\circ < \mu$ ise kaymaz.

$\tan 15^\circ = 0,26794.. < \mu = 0,3...0,70$ olduğuna göre çelik konstruksiyon kaymaz.

1.2.4. Yuvarlak cisimlerde yüzey basması, Hertz basıncı

Yuvarlak yüzeyli iki cisim birbirine kuvvet altında dokunuyorsa, dokunma yerlerinde deformasyon oluşur. Bu dokunma yerlerindeki basma gerilmeleri "**Hertz yüzey basıncı**" olarak adlandırılır. Buradaki gerilme hesapları Hertz' in ortaya koyduğu teoriye göre yapılır. Bu teoride şu kabuller var sayılır:

- Malzeme homojen ve izotropdur,
- Hooke kanunu geçerlidir,
- Küçük bir alan olarak düşünülen dokunma noktasında veya çizgisinde yalnız normal kuvvet var sayılır. Yani çapraz kuvvet veya kayma gerilmesi yoktur.
- Dokunmadaki deformasyon parçanın diğer boyutlarına oranla çok küçük var sayılır.
- Kuvvetin bütün dokunma alanına eşit olarak dağıldığı var sayılır.

Aşağıda verilen formüllerde çelik ve demir için esneklik katsayısı Poisson (*puason*) sayısı ν (nü), genel olarak $\nu = 0,3$ alınır.

Hertz'e göre birbirlerine bir çizgide değen iki cismin arasındaki en büyük basma gerilmesi:

$$F. 11 \quad \sigma_{bHmax} = - \sqrt{\frac{F \cdot E}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot (1 - \nu^2)}}$$

$$F. 12 \quad b = \sqrt{\frac{8 \cdot F \cdot r \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot L}}$$

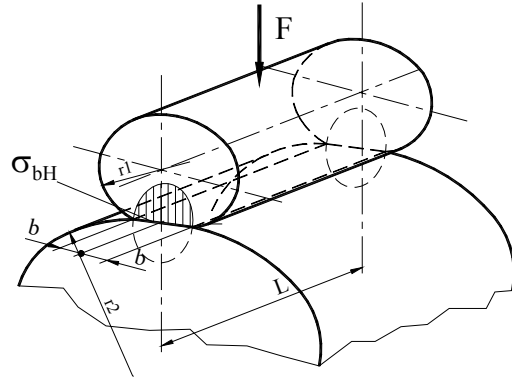
Birbirlerine değen cisimler küresel ise:

$$F. 13 \quad \sigma_{bHmax} = - \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot F \cdot E^2}{r^2 \cdot (1 - \nu^2)^2}}$$

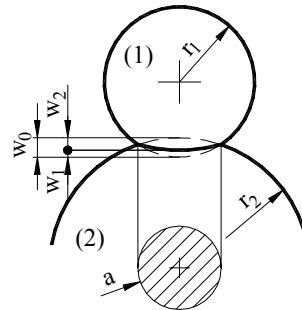
$$F. 14 \quad a = \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot (1 - \nu^2) \cdot F \cdot r}{E}}$$

Cisimlerin deformasyonu:

$$F. 15 \quad w_0 = \sqrt[3]{\frac{2,25 \cdot (1 - \nu^2)^2 \cdot F^2}{r \cdot E^2}}$$



Şek. 1.15, Yuvarlak yüzeyli cisimlerde yüzey basıncı



Şek. 1.16, Küresel cisimlerde yüzey basıncı

$$E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$$

$$r = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{veya} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

σ_{bHmax}	N/mm ²	mak. Hertz yüzey basıncı
F	N	kuvvet
E	N/mm ²	elastiklik modülü
r	mm	cismin yarı çapı
L	mm	cismin dokunma boyu
ν	1	esneklik katsayısı (puason sayısı)
b	mm	dokunma eninin yarısı

Hertz yüzey basıncı için örnek:

He1 Çelik ray üzerinde hareket eden ve maksimum tekerlek kuvveti 50 kN ile raya basan bir vinç tekerleğinin oluşturduğu maksimum yüzey basıncı ne kadardır?

- Çelik ray : St 52-3 den ve 40x40 mm ölçüsünde.
- Tekerlek : GS 52 den ve 250 mm çapında.

Hertz'e göre :

$$\sigma_{bHmax} = \sqrt{\frac{F \cdot E}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot (1 - \nu^2)}}$$

Burada F = 50 000 N
 $E_1 = 211\,000 \text{ N/mm}^2$ St 52-3
 $E_2 = 205\,000 \text{ N/mm}^2$ GS 52
 $E = \frac{2 \cdot 211\,000 \cdot 205\,000}{211\,000 + 205\,000} = 207\,956,7 = 208\,000 \text{ N/mm}^2$
 $r_1 = 250 \text{ mm}$, $r_2 = \infty$ düz, yani sonsuz
 $r = r_1 = 250 \text{ mm}$
 $L = 40 \text{ mm}$
 $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$

$$\sigma_{bHmax} = \sqrt{\frac{50000 \cdot 208000}{2 \cdot \pi \cdot 250 \cdot 40 (1 - 0,3^2)}} = 426,487...$$

Hertz'e göre maksimum yüzey basması $\sigma_{bHmax} = \underline{\underline{426 \text{ N/mm}^2}}$ dir.

Dikkat:

Emniyetli Hertz yüzey basıncı değeri hiçbir literatürde yoktur. Hesaplanması içinde herhangi bir hesap reçetesi ve hipotezi bulunmamaktadır. Emniyetli Hertz yüzey basıncı değeri yalnızca deneylerle elde edilir.

1.2.5. Burkulma (Flambaj)

Ekseninden baskıya zorlanan ince sütunun kesitinin boyuna oranı küçük ise, bu sütunda burkulma oluşabilir. Bu olay bir stabilite problemidir. Burkulmanın oluşması için parçadaki hesaplanan gerilimin muhakkak gerilim sınırlarını aşması veya bu sınırlara yaklaşması gerekli değildir. Bu değerler emniyetli mukavemet değerlerinin çok çok altında olabilir. Parça hiç bir zaman ideal doğru olmayacağı ve kuvvet de hiç bir zaman tam ağırlık merkezi ekseninden etkisini göstermeyeceği için, burkulma olayı her zaman oluşabilecektir.

Ekseninden baskıya zorlanan ince sütunda, oluşan burkulma gerilmesi ile hesaplanan basma gerilmesi arasında aşağıda gösterilen bağıntı kurulur:

F. 16

$$S_{bk} = \frac{\sigma_{bk}}{\sigma_b} \geq S_{BK}$$

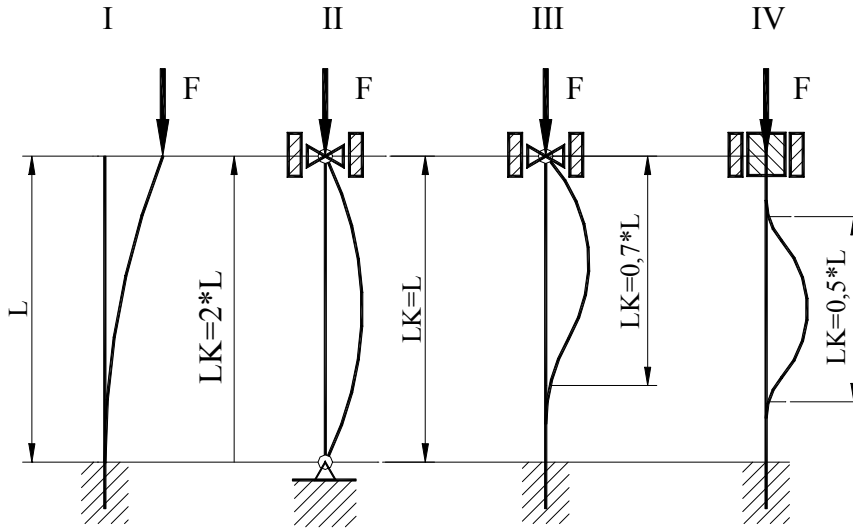
Burkulma gerilimi Euler'e (oyler) göre şu şekilde hesaplanır:

F. 17

$$\sigma_{bk} = \frac{F_{bk}}{A}$$

S_{bk}	1	hesaplanan burkulma emniyet katsayısı
σ_{bk}	N/mm ²	burkulma gerilmesi
σ_b	N/mm ²	hesaplanan basma gerilmesi
S_{BK}	1	gerekli olan emniyet katsayısı
F_{bk}	1	burkulma kuvveti
A	mm ²	kuvvetin etkilediği kesit alanı

Euler'e göre aşağıda (Şek. 1.17) görülen 4 burkulma durumu vardır.



Şek. 1.17, Euler'e göre 4 burkulma durumu

Euler'e göre en küçük burkma kuvveti (F_{bk}) burkulma esnasında şu değeri alır:

$$F_{bk} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{bk}^2}$$

Geometrik boyutların oranından burkulmanın tipik büyüklüğü "**narınlik derecesi**" üretilmiştir. Narınlik derecesinin birimi yoktur ve sembolü eski Yunan alfabesinden λ (lamda) harfidir. Narınlik derecesi şu şekilde gösterilir:

$$\lambda = L_{bk} / i_{min}$$

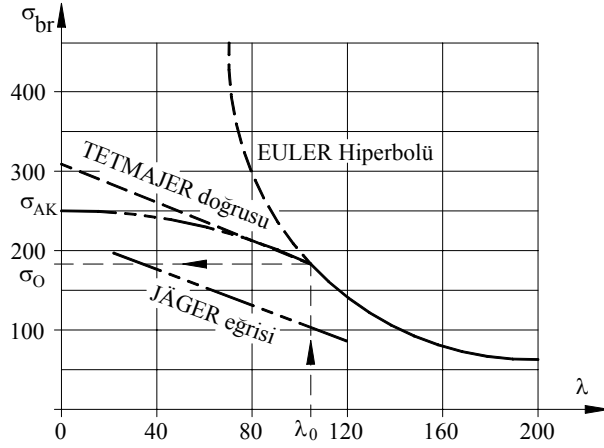
Burada kesitin atalet yarıçapının (i_{min}) değerini narınlik derecesi formülünde yerleştirirsek şu bağıntıları buluruz:

$$i_{min} = \sqrt{I/A} \quad \text{ve} \quad \lambda = L_{bk} / \sqrt{I/A}$$

Burkma kuvveti formülünde narınlik derecesini ve burkma kuvvetinide burkulma gerilmesi formülünde yerleştirirsek:

$$F_{bk} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\lambda^2 \cdot (I/A)} \quad \text{ve} \quad \sigma_{bk} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\lambda^2 \cdot (I/A)} \cdot \frac{1}{A}$$

Burada yapılacak kısaltmalardan sonra Euler'e göre burkulma gerilmesi şu şekilde gösterilir:



F. 18

$$\sigma_{bk} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

E	N/mm ²	Elastiklik modülü
I	mm ⁴	atalet momenti
L_{bk}	mm	hesapsal burkulma boyu
σ_{bk}	N/mm ²	Burkulma gerilmesi
λ	1	narınlik derecesi
i_{min}	mm	kesitin atalet yarıçapı
A	mm ²	kesit alanı

Şek. 1.18, Elastik ve plastik bölgelerde burkulma eğrileri

Euler'in teorisi cisimlerin elastik bölgesi için geçerlidir. Yani Hooke'un kanunlarının geçerli olduğu durumlarda kullanılır. Burada burkulma gerilmesini σ_{bk} -yı narınlik derecesinin fonksiyonu olarak gösterecek olursak ortaya Euler hiperbolü çıkar (Şek. 1.18). Yukarıda verilen burkulma gerilmesi denklemini inceleyecek olursak narınlik derecesinin küçülmesi ile burkulma gerilmesinin büyüdüğünü görürüz. Hakikatte bu basma gerilmesinin yüksek olduğu hali gösterir.

Buda plastik deformasyonların başladığı bölgeye yaklaşıldığının göstergesidir. Böylece Euler'in varsayımı olan elastik sınırı aşma tehlikesi doğar ve "**narinlik sınırı**" tanımı λ_0 (*lamda indeks sıfır*) ortaya çıkar. Narinlik sınırını belirtmek istersek, aşağıdaki bağıntıdan başlamamız gerekir. Plastik deformasyona oluşmaması için hesaplanan burkulma gerilmesini malzemenin orantılı mukavemet değerine σ_0 eşit veya küçük olması gereklidir. Şöyleki :

$$\sigma_{bk} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_0$$

Bu tanımın sağ tarafını eşit olarak kabul edip narinlik derecesine göre çözümlersek narinlik sınırını, λ_0 elde ederiz.

F. 19

$$\lambda_0 = \sqrt[2]{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_0}}$$

Örneğin: Yapı çeliği St37 için narinlik sınırını (λ_0) hesaplamak istersek:

Elastiklik modülü	$E = 2,10 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
Akma mukavemeti	$\sigma_{AK} = 240 \text{ N/mm}^2$
Orantılı mukavemet	$\sigma_0 \approx 0,8 \sigma_{AK} = 0,8 \cdot 240 = 192 \text{ N/mm}^2$

$$\lambda_0 = \sqrt[2]{\pi^2 \cdot E / \sigma_0} = \sqrt[2]{\pi^2 \cdot 210000 / 192} = 103,898... \Rightarrow \lambda_0 = 104$$

Böylece narinlik sınır sayısını St 37 için $\lambda_0 = 104$ olduğu hesaplanmış olur.

Bu demektir ki: St37 malzemesi için yapılan burkulma hesaplarında ilk önce var olan narinlik derecesi λ_{he} hesaplanacaktır.

$$\lambda_{he} = L_{bk} / i_{min}$$

Ve sonra bu hesaplanan narinlik derecesi λ_{he} ile o malzemenin narinlik sınır sayısı λ_0 karşılaştırılacaktır.

Eğer bir hesapta $\lambda_{he} > \lambda_0$ ise hesaplar Euler'e göre yapılacaktır, fakat $\lambda_{he} \leq \lambda_0$ ise hesaplar plastik deformasyon teorilerine göre yapılacaktır.

Plastik deformasyonlara göre burkulma hesapları için bir tek teori yoktur. Bu teorilerin arasında bu gün halâ makina yapımı hesaplarında kullanılan Tetmajer (*tetmajer*) teorisi ilk akla gelendir. Tetmajer'e göre, burkulma gerilmesi, narinlik sayısının fonksiyonu olarak belirtildiğinde, orantılı mukavemet değerini veren Euler-hiperbolü üzerindeki nokta ile σ_{bk} ekseninde ezilme mukavemet değerine eşit olan nokta arasındaki doğrudur.

Pratikte kullanılan Tetmajer'e göre hesaplama formülü şöyledir:

$$\sigma_{bk} = a - b \cdot \lambda_{he}$$

Bu formülde kullanılan sembollerin yerine aşağıdaki tabeladan (Tabela 1.1) alınan değerler konulduğunda istenilen malzemeye göre burkulma gerilmeleri hesaplanır.

Örneğin St 60 için formül:

$$\sigma_{bkSt60} = 335 - 0,62 \cdot \lambda_{he}$$

Tabela 1.1, Tetmajer formülündeki " a " ve " b " değerleri

Malzeme	E N/mm ²	λ_0	a N/mm ²	b N/mm ²
St37	$2,1 \cdot 10^5$	104	310	1,14
St50 St60	$2,1 \cdot 10^5$	89	335	0,62
%5-Ni-Çelik	$2,1 \cdot 10^5$	86	470	2,30
Kırdöküm	$1,0 \cdot 10^5$	80	$\sigma_{bk} = 776 - 12 \lambda + 0,053 \lambda^2$	
Çamağacı	$1,0 \cdot 10^4$	100	29,3	0,194

Yapılan hesaplarda narinlik sayısı 20 ile 30 arasında ise burada burkulma hesabı yapılmaz, sütun veya parça doğrudan doğruya basma gerilimi ile kontrol edilir. Çelik konstruksiyon, vinç ve köprü yapımı hesaplarında DIN 4114 de gösterilen "*omega yöntemi*" ile hesaplar yapılır. Burada burkulma sayısı omega ω yardımcı değer olarak kullanılır. Hesap formülünde şu şekildedir:

F. 20

$$\sigma_{bk} = \omega \cdot F / A \leq \sigma_{BEM}$$

Burada Jäger (*yeger*) omegayı lamdanın bir fonksiyonu olarak almış ve burkulma emniyet katsayısında 1,5 olarak değerlendirmiştir. Omega Jäger'e göre şu şekilde gösterilir:

F. 21

$$\omega(\lambda) = \sigma_{BEM} / \sigma_{BKEM}$$

DIN 1050 ye göre St 37 için emniyetli basma mukavemeti $\sigma_{BEM} = 140 \text{ N/mm}^2$
St 52 için emniyetli basma mukavemeti $\sigma_{BEM} = 210 \text{ N/mm}^2$

Pratikte omega değeri aşağıdaki tabeladan (Tabela 1.2) alınır.

Tabela 1.2, (DIN4114 ve DIN 1052 den) Omega (ω) değerleri

λ_{he}	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
St 37	1,04	1,14	1,30	1,55	1,90	2,43	3,31	4,32	5,47	6,75	8,17
St 52	1,06	1,19	1,41	1,79	2,53	3,65	4,96	6,48	8,21	10,13	12,26
Tahta	1,08	1,26	1,62	2,20	3,00	4,32	5,88	7,68	9,72	12,00	14,52

1.2.5.1. Burkulma için örnekler (flambaj için örnekler)

BR1 Bir piston milinin ölçülendirmesini yapalım. Mil iki ayrı yerde başka koşullarla çalışacak olsun. Piston milinin boyu 2000 mm ve piston mili iki ucundan oynak bağlanmış kabul edilsin.

Bilinen değerler ve istenilen şartlar:

- a) - piston eksenindeki etkili kuvvet $F_{\max} = 96 \text{ kN}$,
 - gerekli burkulma emniyet katsayısı $S_{\text{BKGER}} = 8$
 b) - piston eksenindeki etkili kuvvet $F_{\max} = 300 \text{ kN}$,
 - gerekli burkulma emniyet katsayısı $S_{\text{BKGER}} = 5$

$$\mathbf{a)} \quad F_{\text{bk}} = \pi^2 E I / L_{\text{bk}}^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\text{ger}} = F_{\max} S_{\text{BKGER}} L_{\text{bk}}^2 / (\pi^2 E)$$

Bilinen değerleri yerleştirirsek $I_{\text{ger}} = 96000 \cdot 8 \cdot 2000^2 / (\pi^2 \cdot 211000) = 1,475 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$I = \pi d^4 / 64 \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{64 I}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 1,475 \cdot 10^6}{\pi}} = 74,04 \dots$$

$$I_y = \pi d^4 / 64 \quad \text{ve} \quad A = \pi d^2 / 4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{4 \pi d^4}{64 \pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{74}{4} = 18,5 \text{ mm}$$

Böylece narinlik derecesi hesaplanır:

$$\lambda_{\text{he}} = \frac{L_{\text{bk}}}{i_{\min}} = \frac{2000}{18,5} = 108 > \lambda_0 = 104$$

Böylece hesabın Euler'e göre yapılmış olması doğrudur. Sonuç olarak:

Pistonun çapı 74 mm veya daha büyük seçilebilir.

$$\mathbf{b)} \quad F_{\text{bk}} = \pi^2 E I / L_{\text{bk}}^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\text{ger}} = F_{\max} S_{\text{BKGER}} L_{\text{bk}}^2 / (\pi^2 E)$$

Bilinen değerleri yerleştirirsek $I_{\text{ger}} = 300000 \cdot 5 \cdot 2000^2 / (\pi^2 \cdot 211000) = 2,881 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$I = \pi d^4 / 64 \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 2,881 \cdot 10^6}{\pi}} = 87,528 \dots \Rightarrow d = 88 \text{ mm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{4 \pi d^4}{64 \pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{88}{4} = 22 \text{ mm}$$

Böylece narinlik derecesi hesaplanır:

$$\lambda_{he} = \frac{L_{bk}}{i_{min}} = \frac{2000}{22} = 90,9... < \lambda_0 = 104$$

Bu durumda burkulmanın plastik deformasyona, yani Tetmajer'e göre hesaplanması gereklidir.

Tetmajer'e göre burkulma gerilmesi, Tabela 1.2 den :

$$\sigma_{bk} = 310 - 1,14 \lambda = 310 - 1,14 \cdot 91 = 206,26$$

Hesaplanan basma gerilmesi: $\sigma_b = F / A = 4.300000 / \pi \cdot 88^2 = 49,324..$

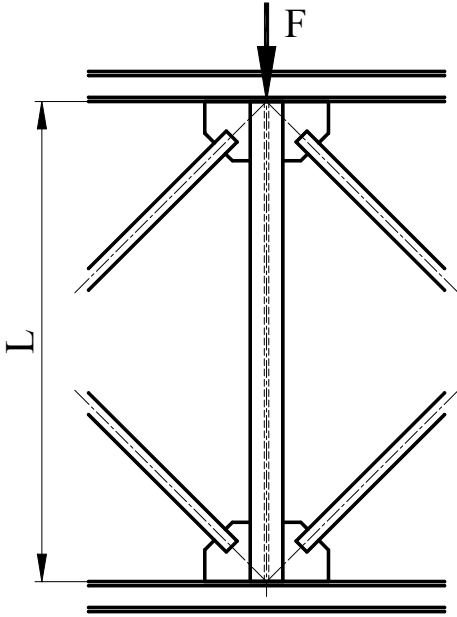
Karşılaştırmalar yapılırsa:

$$S_{bk} = \sigma_{bk} / \sigma_b = 206 / 49 = 4,2 < 5 \text{ burkulma olasılığı fazladır.}$$

Piston çapı 95 mm alınıp hesaplar yapılırsa $S_{bk} = 5,06 > 5$ bulunur.

Pistonun çapı 95 mm veya daha büyük seçilebilir.

BR1 İki tarafı rijit bağlantılı bir sütunun boyutlamasını Omega yöntemine göre yapalım.
Çelik konstruksiyon için St 37 den NPI-Profil (çift T) kullanalım. Sütun boyu 6 m .
Sütuna gelen yük $F = 40$ kN.



Şek. 1.19, Çelik sütun

Şek. 1.17 ve Şek. 1.19 den $L_{bk} = 0,5 \cdot L$ bulunur.

$$L_{bk} = 0,5 \cdot 6000 = 3000 \text{ mm}$$

Narinlik derecesi λ yı takriben 200 seçmek istersek;

$$i_y = L_{bk} / \lambda = 3000 / 200 \approx 15 \text{ mm buluruz.}$$

Böylece NPI 160 ın $i_y = 15,5$ mm tabeladan okunur.

$$\lambda = L_{bk} / i_y = 3000 / 15,5 = 193,54...$$

Tabela 1.2 den $\lambda = 193$ için, omega değeri bulunur.

$$\omega = 6,75 - \left[\frac{6,75 - 5,47}{200 - 180} (200 - 193) \right] = 6,336..$$

$$\omega = 6,34$$

NPI-Profilleri tabelasından NPI 160 için $A = 2280 \text{ mm}^2$ bulunur.

$$\sigma_{bk} = \omega F / A = 6,34 \cdot 40000 / 2280 = 111,22...$$

$\sigma_{bk} = 110 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{BEM} = 140 \text{ N/mm}^2$ olduğundan NPI 160 seçilir.

1.2.6. Eğilmeye zorlanma, eğilme gerilmesi

Eğilmeye zorlanmaya kısaca "**eğilme**" de denir. Gayet basit bir çubuk düşünelim (Şek. 1.20). Bu çubuğu ekseninden geçen düzlem üzerinde ve iki ucundan, karşıt yönlerde, etkileyen iki kuvvet düşünelim. Kabul ettiğimiz kesit yöntemine göre bu çubuktaki gerilmeyi hesaplamak istersek, çubuğun hesap yapılacak yerinden bir kesit almamız gerekir. Bu kesiti eksene dik olarak alalım. Etken dış kuvvetler bu kesitin iki yüzünü birbirine karşı eğmeye zorlayacaktır. Böylece çubuk eğilecektir. Kesitteki kuvvetleri ve momentleri inceleyecek olursak kesitte yalnız eğilme momentinin etkili olduğunu görürüz. Bir kiriş veya çubukta oluşan momentlerin durumu ve pratikte kullanılışları Şek. 1.24 den Şek. 1.31 e kadar gösterilmiştir.

Böylece kesitte "**eğme kuvvet çifti**" oluşur. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini birbirine doğru eğmeye, yani çubuğu eğilmeye zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlanma şekline kuvvete olduğu gibi parçada "**eğilmeye zorlanma**" veya kısaca "**eğilme**" adı verilir. Burada oluşan gerilmeye "**normal gerilme**" nin bir türüdür.

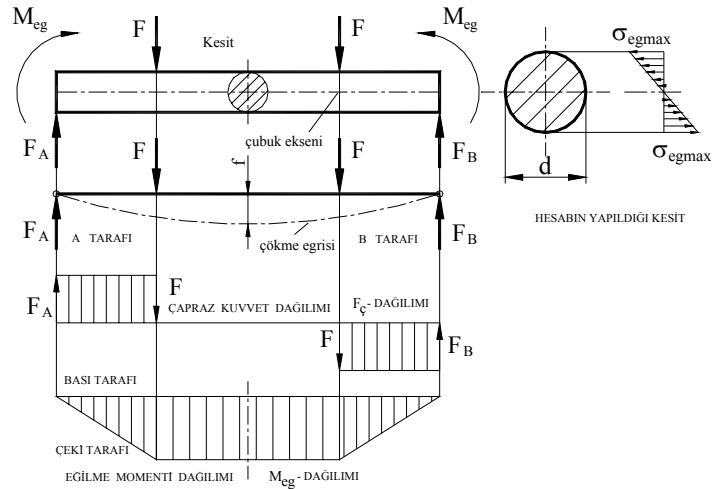
Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak milleri, aksları, kirişleri v.b. verebiliriz.

Burada meydana gelen gerilmeye "**eğilme gerilmesi**" adı verilir. Mukavemet hesaplarında ve teknikte " **σ_{eg}** " (*sigma indeks eg*) olarak gösterilir.

Bütün bu anlattıklarımızı formülle gösterelim:

$$F. 22 \quad \sigma_{eg} = \frac{M_{eg}}{W_{eg}} \leq \sigma_{EGEM}$$

$$F. 23 \quad S_{he} = \frac{\sigma_{EGSK}}{\sigma_{eg}} \geq S_{GER}$$

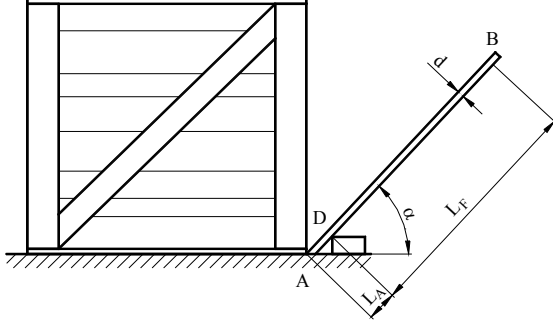


Şek. 1.20, Eğilme gerilmesi

σ_{eg}	N/mm^2	hesaplanan eğilme gerilmesi
M_{eg}	Nmm	eğilme momenti
W_{eg}	mm^3	eğilme için mukavemetmomenti.
		Daire kesiti için $W_{eg} = \pi d^3 / 32$
σ_{EGEM}	N/mm^2	malzemenin emniyetli eğilme mukavemeti
S_{he}	1	hesaplanan emniyet katsayısı
S_{GER}	1	gerekli emniyet katsayısı
σ_{EGSK}	N/mm^2	malzemenin şekillenmesine göre eğilme mukavemeti

1.2.6.1. Eğilme gerilmesi için örnekler

EG1 Şekilde gösterildiği gibi (Şek. 1.21) demir bir levye ile bir sandığı yerinden oynatalım. Destek noktası D deki yalnız eğilme gerilmesi nekadardır ?



Şek. 1.21, Levye ile kaldırılan sandık

Sandığın ağırlığı 500 kg, destek sandık mesa-fesi $L_A = 40$ mm ve destek ile el arasındaki mesafe $L_F = 960$ mm dir. Levye St 70-2 den ve destek noktasındaki kesiti 16 mm dir.

$$\sigma_{eg} = M_{eg} / W_{eg}$$

D noktasındaki moment ya A tarafından veya B tarafından hesaplanır. Çünkü, D noktasında momentlerin toplamı sıfırdır.

A noktasında sandıktan etken olan kuvvet, ilk başta sandık ağırlığının yarısının $\cos\alpha$ ile

eksiltmiş kuvvet tesir etmesine rağmen ileride levye yataya yaklaşınca sandığın yarı yükü levreye etki eder. Böylece A noktasında etki eden kuvvet;

$$F_A = m_{san} g / 2 = 500 \cdot 9,81 / 2 = 2452,5$$

$$M_{eg} = L_A F_A = 2455 \cdot 40 = 98200$$

Eğilme mukavemet momentini

$$W_{eg} = \pi d^3 / 32 = \pi 16^3 / 32 =$$

$$F_A = 2452,5 \text{ N}$$

$$M_{eg} = 98200 \text{ Nmm}$$

$$W_{eg} = 402,12 \text{ mm}^3$$

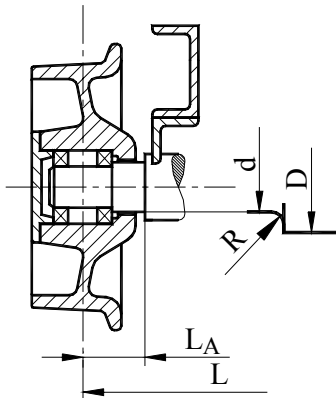
Böylece

$$\sigma_{eg} = 98200 / 402 = 244,278...$$

Levyede D noktasındaki eğilme gerilmesi $\sigma_{eg} = \underline{\underline{245 \text{ N/mm}^2}}$ dir.

EG1 Şekildeki demiryolu vagonunun tekerlek aksına bakalım (Şek. 1.22). Her bir tekerleğe maksimum tekerlek yükü 9 kN. Tekerlek aksı St 70-2, 1.0070 dir.

$$L_A = L_B = 90 \text{ mm} ; L = 1400 \text{ mm} ; D = 90 \text{ mm} ; d = 80 \text{ mm} ; R = 5 \text{ mm}$$



Şek. 1.22, Demiryolu vagonu aksı

$$\sigma_{eg} = M_{eg} / W_{eg}$$

Eğilme momenti A ve B destekleri arasında sabittir.

$$M_{eg} = F_{tek} L_A = 9000 \cdot 90 = 810000 \text{ Nmm}$$

$$W_{eg} = \pi d^3 / 32$$

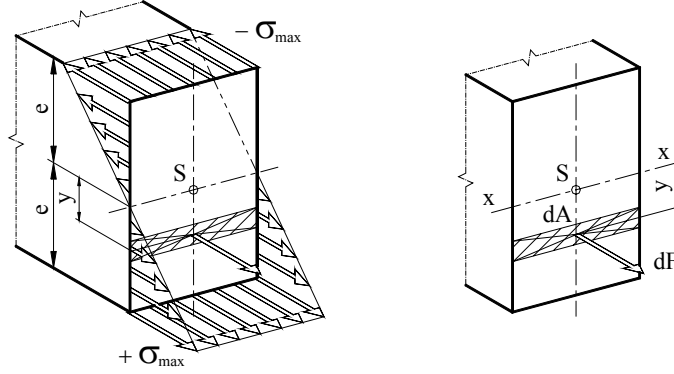
$$W_{eg} = \pi 80^3 / 32 = 50265,482... \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{eg} = 810000 / 50265 = 16,114...$$

X-X kesitindeki eğilme gerilmesi

$$\sigma_{eg} = \underline{\underline{16 \text{ N/mm}^2}} \text{ dir.}$$

1.2.6.2. Eğilme gerilmesi formülünün kanıtı



Şek. 1.23, gerilme şeması

Çekme gerilmesine göre normal gerilme

$$\sigma = dF / dA$$

dF kuvvetinin S deki momentini

$$dM_{eg} = dF y \implies dF = dM_{eg} / y$$

Kuvveti gerilme formülüne yerleştirirsek

$$\sigma = dM_{eg} / (dA y)$$

$$dM_{eg} = \sigma dA y$$

Üçkenlerin benzerliğinden

$$\sigma_{max} / \sigma = e / y$$

buradan

$$\sigma = \sigma_{max} y / e$$

Gerilme "σ" yı yerleştirirsek

$$dM_{eg} = \sigma_{max} dA y^2 / e$$

Eğilme momenti

$$M_{eg} = \sum dM_{eg} = \sum \sigma_{max} dA y^2 / e$$

$$M_{eg} = \frac{\sigma_{max}}{e} \sum dA y^2$$

Burada atalet momenti

$$I = \sum dA y^2$$

Genelde mukavemet momenti

$$W_{eg} = I / e \quad \text{ve} \quad M_{eg} = \sigma_{max} W_{eg}$$

Burada maksimum gerilme

$$\sigma_{max} = M_{eg} / W_{eg}$$

Eğer oluşan maksimum gerilmeyi

"Eğilme gerilmesi" olarak adlandırırsak:

$$\pm \sigma_{max} = \sigma_{eg}$$

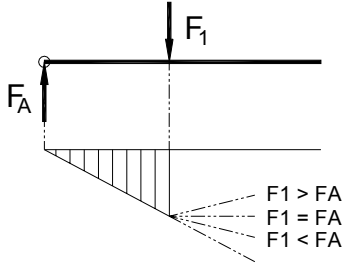
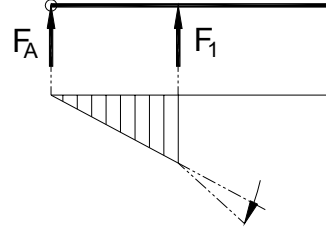
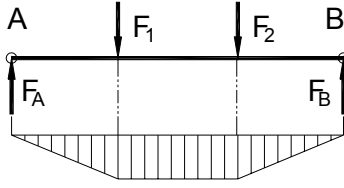
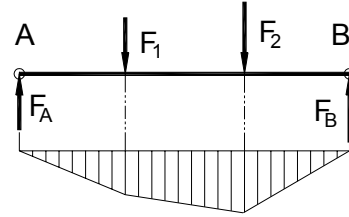
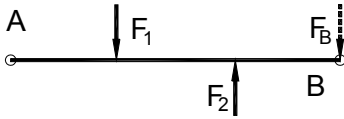
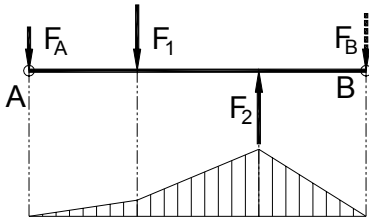
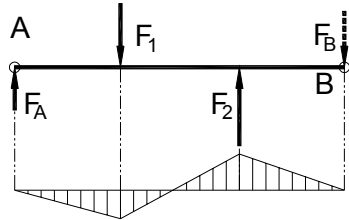
F. 24

$$\sigma_{eg} = \frac{M_{eg}}{W_{eg}}$$

Eğilme gerilmesi



Şek. 1.24, Moment dağılımı

Şek. 1.25, Moment dağılımı, F_1 , F_A nın ters yönünden etkenseŞek. 1.26, Moment dağılımı, F_1 , F_A nın aynı yönünde etkenseŞek. 1.27, Moment dağılımı $F_A = F_1 = F_2 = F_B$ Şek. 1.28, Moment dağılımı $F_2 > F_1$ Şek. 1.29, Moment dağılımı $F_2 > F_1$ Şek. 1.30, Moment dağılımı $F_1 + F_B < F_2$ Şek. 1.31, Moment dağılımı $F_1 + F_B > F_2$

Genelde moment dağılımı çekme tarafında gösterilir.

Şek. 1.25 de ikinci kuvvet birinci kuvvete göre ters yönde etken ve Şek. 1.26 de ikinci kuvvet birinci kuvvetle aynı yönde etken olduğuna göre, moment dağılımı gösterilmiştir.

İki kuvvet ters yönden etki gösteriyorsa, yatak kuvvetlerini bulmak için ilk önce büyük kuvvet tarafında olan yatağın yatak kuvveti büyük kuvvetin ters yönü olarak belirlenir. Daha sonra Şek. 1.30 ve Şek. 1.31 deki düşüncelerle yatak kuvvetlerinin yönü bulunur.

1.2.7. Kesmeye zorlanma, kesme gerilmesi

Kesmeye zorlanmaya kısaca "**kesme**" denir. Gayet basit olarak bir çubuk düşünelim (Şek. 1.32). Bu çubuğun eksenine dik düzlem içinde karşılıklı iki kuvvet ile yükleyelim. Bu kesit düzleminde gerilmeyi hesaplamak istersek görürüz ki, eksene dik olan düzlem içindeki iki kuvvet kesitte "**kesme kuvvet çifti**" ni oluştururlar. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini birbirlerine göre kaydırmaya, yani kesmeye zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlama şekline kuvvette olduğu gibi, parçada "**kesmeye zorlanma**" veya kısaca "**kesme**" adı verilir. Bir yüzeyin içinde olan kuvvete çapraz kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeyede kayma gerilmesi dediğimize göre, burada oluşan gerilmeye "**kayma gerilmesi**" nin bir türüdür.

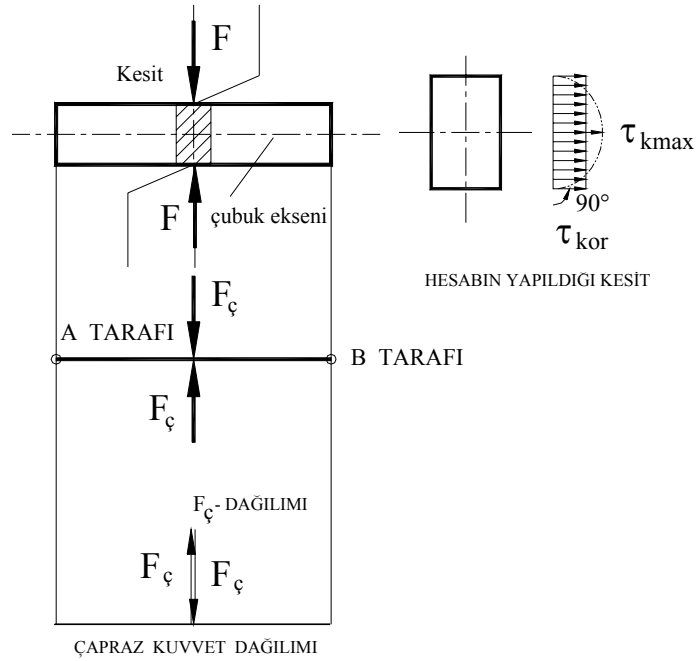
Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak makasları, perçinleri, kesme preslerini, v.b. verebiliriz.

Burada oluşan gerilmeye "**kesme gerilmesi**" adı verilir. Mukave-met hesaplarında ve teknikte " τ_k " (*tau indeks k*) olarak gösterilir.

Bütün bu anlattıklarımızı formülle gösterelim :

$$F. 25 \quad \tau_k = \frac{F_\varphi}{A} \leq \tau_{KEM}$$

$$F. 26 \quad S_{he} = \frac{\tau_{KSK}}{\tau_k} \geq S_{GER}$$



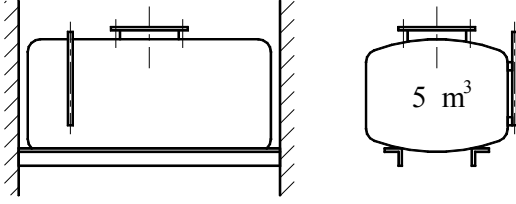
Şek. 1.32, Kesme gerilmesi

τ_k	N/mm ²	hesaplanan kesme gerilmesi
F_φ	N	çapraz kuvvet
A	mm ²	kesit alanı
τ_{KEM}	N/mm ²	malzemenin emniyetli kesme mukavemeti
S_{he}	1	hesaplanan emniyet katsayısı
S_{GER}	1	gerekl emniyet katsayısı
τ_{KSK}	N/mm ²	malzemenin şekillenmesine göre kesme mukavemeti

1.2.7.1. Kesme gerilmesi için örnekler

KE1 Hacmi 5 m^3 olan su deposu $40 \times 40 \times 4 \text{ mm}$ ölçüsündeki St 37 den normal köşebentlerle bir duvara şekilde (Şek. 1.33) görüldüğü gibi oturtulmuştur.

Bir köşebentin bağlantı yerindeki yalnız, kesme gerilmesi ne kadardır ?



Şek. 1.33, Su deposu

$$\tau_k = F / A$$

$$F = m g / 4$$

$$F = V \rho g / 4$$

$$F = 5 \cdot 1000 \cdot 9,81 / 4 = 12262,5 \text{ N}$$

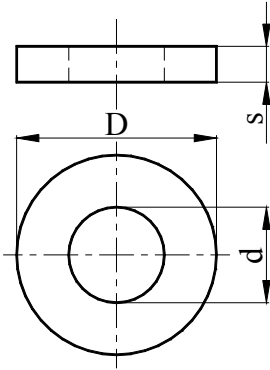
$40 \times 40 \times 4 \text{ mm}$ Normal köşebent standart parçadır. Köşebentin alanını tabeladan okuyabiliriz.

$$A = 308 \text{ mm}^2 \quad \tau_k = 12262,5 / 308 = 39,813...$$

$$A = 39,8 \text{ mm}^2$$

Bir köşebentteki kesme gerilmesi $\tau_k = \underline{\underline{40 \text{ N/mm}^2}}$ dir.

KE2 Şekilde (Şek. 1.34) görülen rondela DIN 125 (St 50-2) göre 1000 kN luk presle üretiliyor. Pres kalıbı rondelayı bir vuruşta iç ve dış çapını kesecek şekilde yapılmış olsun. Rondeladaki kesme gerilmesi ne kadardır?



Şek. 1.34, Rondela

$$\text{Dış çap } D = 24 \text{ mm}$$

$$\text{İç çap } d = 13 \text{ mm}$$

$$\text{Kalınlık } s = 2,5 \text{ mm}$$

$$\tau_k = F / A$$

Presin verdiği kuvvet aynı zamanda kesme kuvvetidir.

$$F = 10^6 \text{ N}$$

$$\text{Rondelanın kesit alanı } A = \pi (D + d) s$$

$$A = \pi (24 + 13) 2,5 = 290,59...$$

$$A = 290,59 \text{ mm}^2$$

Böylece kesme gerilmesi hesaplanır :

$$\tau_k = 10^6 / 290,59 = 3441,187$$

$$\tau_k = 3441 \text{ N/mm}^2$$

Rondeladaki kesme gerilmesi $\tau_k = \underline{\underline{3440 \text{ N/mm}^2}}$ dir.

1.3. Torsiyon, burulmaya zorlanma

Burulmaya zorlanmaya kısaca "**torsiyon**" denir. Basit bir çubuk düşünelim (Şek. 1.35). Bu çubuğun eksenine dik iki düzlem içinde her bir düzlemde karşılıklı iki kuvvet ile yükleyelim. Bu iki eksenine dik düzlemin arasında bir kesit düzleminde gerilmeyi hesaplamak istersek görürüz ki bu kuvvetler kesitte "**burmaya zorlayan kuvvet çifti**" ni oluştururlar. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini burmaya zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlama şekline kuvvette olduğu gibi parçada "**burulmaya zorlanma**" veya kısaca "**burulma**" veya "**torsiyon**" adı verilir. Bir yüzeyin içinde olan kuvvete çapraz kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeyede kayma gerilmesi dediğimize göre burada oluşan gerilmede "**kayma gerilmesi**" nin bir türüdür.

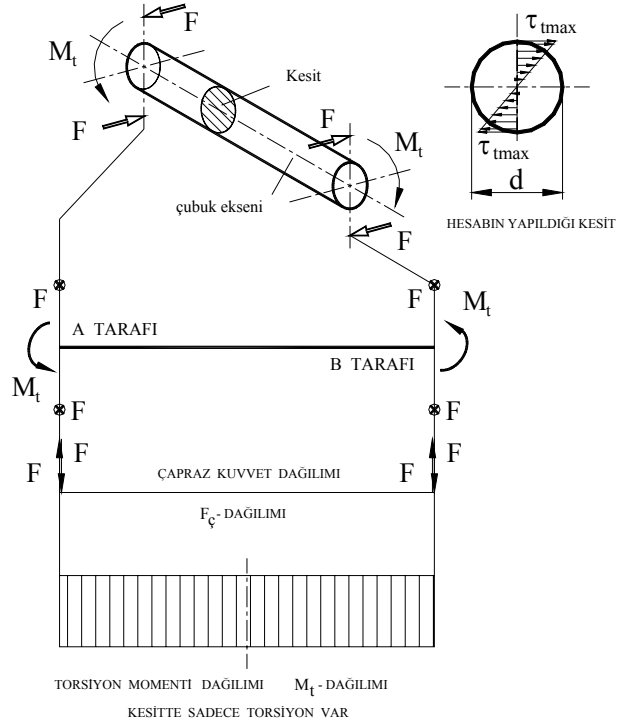
Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak redüktör millerini, civataları v.b. verebiliriz.

Burada oluşan gerilmeye "**burkulma gerilmesi**" veya "**torsiyon gerilmesi**" adı verilir. Mukavemet hesaplarında ve tek-nikte " τ_{br} " (*tau indeks br*) veya " τ_t " (*tau indeks t*) olarak gös-terilir.

Bütün bu anlattıklarımızı formülle gösterelim :

$$F. 27 \quad \tau_t = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{TEM}$$

$$F. 28 \quad S_{he} = \frac{\tau_{TSK}}{\tau_t} \geq S_{GER}$$

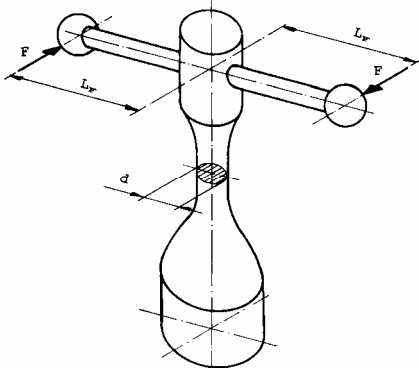


Şek. 1.35, Torsiyon gerilmesi

τ_t	N/mm ²	hesaplanan torsiyon gerilmesi
M_t	Nmm	Torsiyon momenti
W_t	mm ³	torsiyon mukavemet momenti
τ_{TEM}	N/mm ²	malzemenin emniyetli torsiyon mukavemeti
S_{he}	1	hesaplanan emniyet katsayısı
S_{GER}	1	gerekli emniyet katsayısı
τ_{TSK}	N/mm ²	malzemenin şekillenmesine göre torsiyon mukavemeti

1.3.1.1. Torsiyon gerilmesi için örnekler

BR1 Şekilde (Şek. 1.36) görülen anahtar kolundan maksimum kuvvet $F = 300 \text{ N}$ ile cıvata sıkılırsa vede cıvata bu kuvvete karşı koyarsa, anahtarın gövdesindeki torsiyon gerilmesi ne kadardır ?



Şek. 1.36, Cıvata anahtarı

Anahtar malzemesi St 70-2, 1.0070

Gövde çapı $d = 20 \text{ mm}$

Kolboyu $L_F = 250 \text{ mm}$

$$\tau_t = M_t / W_t$$

Torsiyon momenti $M_t = 2 L_F F$

$$M_t = 2 \cdot 250 \cdot 300 = 150000 \text{ Nmm}$$

Torsiyon mukavemet momenti

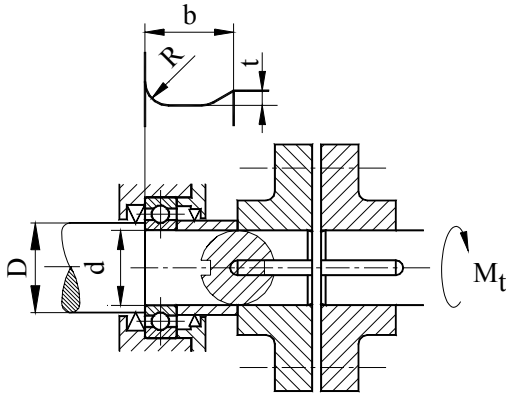
$$W_t = \pi d^3 / 16 = \pi 20^3 / 16 = 1570,796 \dots$$

$$\tau_t = 150000 / 1570 = 95,541 \dots$$

$$\tau_t = 95,541 \text{ N/mm}^2$$

Anahtarın gövdesindeki torsiyon gerilmesi $\tau_t = 95 \text{ N/mm}^2$ dir.

BR1 Şekilde gösterilen (Şek. 1.37) bir vinç yürütme tahriki milindeki güç $P_{\max} = 11 \text{ kW}$ ve devir sayısı $n_{\max} = 130 \text{ d/dak}$, Malzeme St60-2, W.Nr. 1.0060, yüzey kabalığıda hesaplama kesitinde $R_z = 25 \mu\text{m}$. Milin kesitindeki maksimum torsiyon gerilmesi ne kadardır ?



Şek. 1.37, Tahrik mili

$d = 50 \text{ mm}$; $D = 60 \text{ mm}$; $R = 0,5 \text{ mm}$

$$\tau_t = M_t / W_t$$

Torsiyon momenti : $M_t = 9,55 \cdot 10^6 \text{ P} / n$

$$M_t = 9,55 \cdot 10^6 \cdot 11 / 130 = 808 \cdot 10^3 \dots \text{Nmm}$$

Hesabın yapıldığı kesitte milin çapı 39 mm dir. Çünkü kama derinliği $5,5 \text{ mm}$ ve çift taraflı kama 50 mm çıkarılır. Böylece:

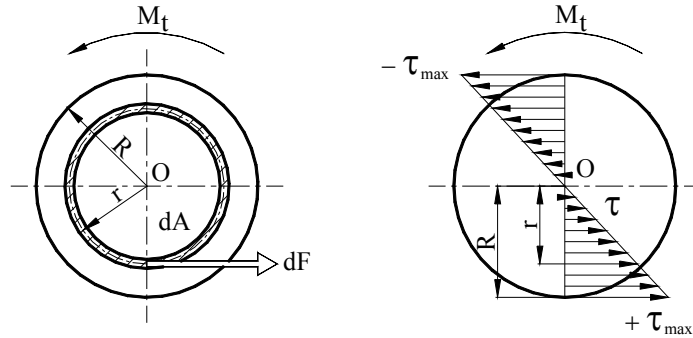
$$W_t = \pi d^3 / 16 = \pi 39^3 / 16 = 11647,3 \dots \text{mm}^3$$

Torsiyon gerilmesi: $\tau_t = 808 \cdot 10^3 / 11647,3 = 69,4 \dots$

$$\tau_t = 69,4 \dots \text{N/mm}^2$$

Milin kesitindeki maksimum torsiyon gerilmesi $\tau_t = 70 \text{ N/mm}^2$ dir.

Torsiyon gerilmesi formülünün kanıtı



Şek. 1.38, Torsiyon gerilmesi

Kayma gerilmesine göre normal gerilme

$$\tau = dF / dA$$

dF kuvvetinin S deki momenti

$$dM_t = dF r \implies dF = dM_t / r$$

Kuvveti gerilme formülüne yerleştirirsek

$$\tau = dM_t / (dA r)$$

$$dM_t = \tau dA r$$

Üçkenlerin benzerliğinden

$$\tau_{\max} / \tau = R / r$$

buradan

$$\tau = \tau_{\max} r / R$$

Gerilme " τ " ı yerleştirirsek

$$dM_t = \tau_{\max} dA r^2 / R$$

Torsiyon momenti

$$M_t = \sum dM_t = \sum \tau_{\max} dA r^2 / R$$

$$M_t = \frac{\tau_{\max}}{R} \sum dA \cdot r^2$$

Burada torsiyon atalet momenti

$$I_t = \sum dA r^2$$

Genelde torsiyon mukavemet momenti

$$W_t = I_t / R \quad \text{ve} \quad M_t = \tau_{\max} W_t$$

Burada maksimum gerilme

$$\tau_{\max} = M_t / W_t$$

Eğer burada oluşan maksimum gerilmeyi "**torsiyon gerilmesi**" olarak adlandırırsak:

$$\pm \tau_{\max} = \tau_t$$

F. 29

$$\tau_t = \frac{T_t}{W_t}$$

Torsiyon gerilmesi

1.4. Bileşik zorlanma

Bileşik zorlanma çeşitli normal gerilmelerden doğmaysa

Bileşik zorlanmalarda yalnız normal gerilmeler etkense, örneğin: eğilme ve çekme veya eğilme ve basma gerilmeleri gibi, etki eden gerilmeler aritmetik olarak toplanırlar. Bu hesaplanan gerilmeye "**toplam normal gerilme**" denir. şöyleki:

$$F. 30 \quad \sigma_{tp} = \sigma_{eg} + \sigma_{\zeta,b}$$

Bileşik zorlanma çeşitli kayma gerilmelerinden doğmaysa

Bileşik zorlanmalarda yalnız kayma gerilmeleri etkense, örneğin: torsiyon ve kesme gerilmesi gibi, gerilmeler aritmetik olarak toplanırlar. Bu hesaplanan gerilmeye "**toplam kayma gerilmesi**" denir. şöyleki:

$$F. 31 \quad \tau_{tp} = \tau_t + \tau_k$$

Bileşik zorlanma normal ve kayma gerilmelerinden doğmaysa

Bileşik zorlanma normal ve kayma gerilmelerinden doğmaysa burada gerilmeler geometrik olarak toplanır. Geometrik toplamayı yapabilmek için bir hipotez kabul etmek gerekir. Bu hesaplanan gerilmeye "**karşılaştırma gerilmesi**" denir. şöyleki:

Biçim değiştirme enerjisi hipotezine göre toplama:

$$F. 32 \quad \sigma_{kar} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

Normal gerilmeler hipotezine göre toplama:

$$F. 33 \quad \sigma_{kar} = 0,5 \cdot \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau)^2} \right)$$

σ_{tp}	N/mm ²	Toplam normal gerilme
τ_{tp}	N/mm ²	Toplam kayma gerilmesi
σ_{kar}	N/mm ²	Karşılaştırma gerilmesi
σ_{eg}	N/mm ²	Hesaplanan eğilme gerilmesi
$\sigma_{\zeta,b}$	N/mm ²	Hesaplanan çekme veya basma gerilmesi
τ_t	N/mm ²	Hesaplanan torsiyon gerilmesi
τ_k	N/mm ²	Hesaplanan kesme gerilmesi
σ	N/mm ²	Hesaplanan normal gerilme
τ	N/mm ²	Hesaplanan kayma gerilmesi
α_0	1	Zorlanma katsayısı, $\alpha_0 = \sigma_{EGDG} / (1,73 \cdot \tau_{TDL})$ diye hesaplanır.

Pratikte: $\alpha_0 = 0,7$ torsiyon statik veya dalgalı, eğme zorlaması değişken,
 $\alpha_0 = 1,0$ torsiyon ve eğme zorlaması aynı cinsden ise.

1.4.1. Genel

Bileşik zorlanma konusuna girmeden önce tek, çift ve üç eksenli gerilmelere kısa bir göz atalım.

Bir cisim çeşitli dış kuvvetler etkisinde olsun. Örneğin: yüzey basıncı, basma ve benzeri kuvvetler, Bu cisimden küp biçiminde küçük bir parça alalım.

Bu dış kuvvetler, bu küp şeklinde düşünülen elementte üç eksenli gerilmeler meydana getirir. Küpün altı yüzeyinin herbirinde bir normal ve iki kayma gerilmesi doğar (Şek. 1.39). Bu gerilmeleri bir koordinat sistemi ile (sağ el sistemi) gösterebiliriz. Eksenler x, y ve z olarak adlandırılır.

Eğer bir eksen yönünde etki eden gerilmeler sıfır ise, geriye gerilmeler olan iki eksen kalacağından, böyle bir gerilme şekline "iki eksenli gerilme" denir.

Eğer yalnız bir normal gerilme var ise ve diğer iki gerilme sıfır ise bu gerilme şekline "**bir eksenli gerilme**" denir.

Bu gerilmelerin gösterilmesindeki sembol ve indekslerin tanımını yapacak olursak:

Örneğin:

x eksen yönünde normal gerilme σ_x ise, burada indeks x eksen yönünü ve sembol σ gerilmenin cinsini gösterir.

Diğer taraftan y eksenine dik olan düzlemde ve x eksen yönünde, x eksenine paralel kayma gerilmesini τ_{xy} ile gösterilir. İndekslerin okunması sağ taraftan olur. Burada sağdaki indeks y gerilmenin bulunduğu düzlemin dik olduğu eksen ve indeks x gerilmenin eksen yönünü ve sembol τ gerilmenin cinsini gösterir.

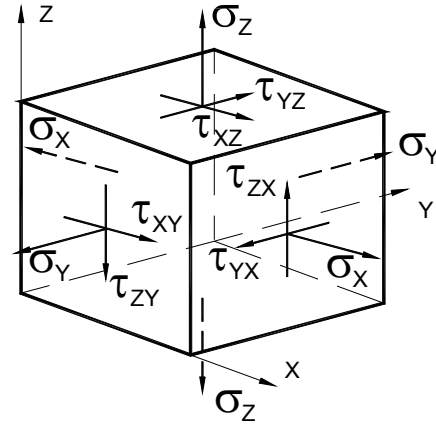
Bir çubuğu bir taraftan eğilme momenti diğer taraftan torsiyon momenti ile yükleyelim. Hesabın yapılacağı kesiti incelediğimizde, burada iki ayrı çeşit gerilme ile karşılaşırız. Bu durumda asıl soru ortaya çıkar.

Ölçülendirilicek veya kontrol edilecek bir makina parçasının kesitinde, ayrı cinsden gerilmeler bulunursa, hesap nasıl yapılır?

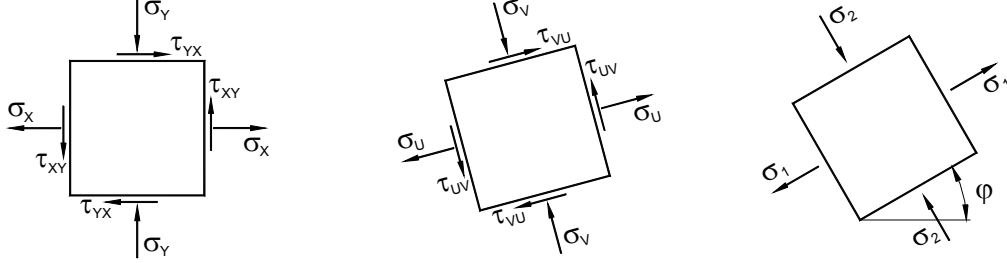
Böyle bir problemin çözümünde tutulacak yol şöyledir:

Parçaya etki eden gerilmeler bir eksenli gerilme olarak "karşılaştırma gerilmesi" adı altında hesaplanır ve malzemenin mukavemet değeri ile karşılaştırılarak karar verilir.

Çünkü: malzemenin bilinen mukavemet değerleri bir eksenli değerlerdir.



Şek. 1.39, Üç eksenli gerilme

Asal normal gerilmeler:

Şek. 1.40, Asal normal gerilmeler

Tanım : Herhangi bir çubuktan küçük bir küp şeklinde alınmış parça kabul edelim (Şek. 1.40). Bu parçanın σ_x , σ_y ve τ_{xy} tarafından etkilendiğini kabul edelim. Bu küpü yavaşça döndürdüğümüzü düşünelim. Bir an gelecek belirli bir açıda, φ (f_i) açısı, σ_x ve σ_y gerilmeleri biri en büyük diğeri de en küçük değere varacaktır $\sigma_{x\max} = \sigma_1$ ve $\sigma_{y\min} = \sigma_2$. Bu arada τ_{xy} ninde kaybolduğu, değerinin sıfır olduğu görülecektir.

Bu durumda şu tanım yapılır:

Kayma gerilmesi sıfır ve yalnız normal gerilmeler var ise, bu gerilmelere "**asal normal gerilmeler** (σ_1 ve σ_2) " denir.

1.4.1.1. Bir boyutlu veya bir eksenli gerilme

Eksende etken olan kuvvetin dik kesitte doğurduğu gerilmeye, bir eksenli veya "**bir boyutlu gerilme**" denir.

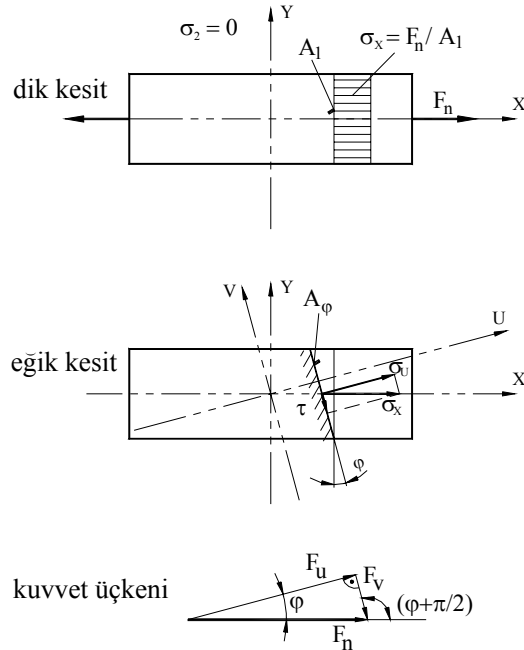
Dik kesitteki gerilmeler:

Burada $F_\zeta = F_y = 0$ olduğundan $\tau_{xy} = 0$ ve $\sigma_y = 0$ dir.

Burada şu bağıntı kurulur:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_x = F_n / A_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}$$

Şek. 1.41 deki çubukta bu durum görülmektedir.



Şek. 1.41, Bir eksenli gerilme

Eğik kesitteki gerilmeler:

Eksenleri saat yelkovanının dönüş yönünün tersine ϕ açısı kadar döndürelim. Bu durumda y eksenine V eksenine ve x eksenine U eksenine diyelim. Eğiklik açısı ϕ kadar eğilmiş eğik kesitteki gerilmeleri formüle edersek:

$$\sigma_x = F_n / A_1$$

Kuvvet üçgeninden $F_U = F_n \cos\phi$ ve $F_V = F_n \sin\phi$

Kesit alanı $A_\phi = A_1 / \cos\phi$

Böylece $\sigma_U = F_U / A_\phi = F_n \cos\phi / (A_1 / \cos\phi)$
 $\sigma_U = (F_n / A_1) \cos^2\phi$
 $\sigma_U = \sigma_x \cos^2\phi$

Buna benzer kayma gerilmesi ;

$$\tau = F_V / A_\phi = F_n \sin\phi / (A_1 / \cos\phi)$$

$$\tau = (F_n / A_1) \sin\phi \cos\phi$$

Trigonometri fonksiyonuna göre : $\sin 2\phi = 2 \sin\phi \cos\phi$ ve $\sin\phi \cos\phi = \sin 2\phi / 2$ olduğuna göre,

$$\tau = \sigma_x \sin 2\phi / 2$$

A_ϕ düzlemine dik olan bir kesit düzleminin x-ekseni ile olan açısı $\phi + (\pi/2)$ dir.

A_ϕ düzlemine dik olan alan $A_{\phi+(\pi/2)} = A_1 / \cos[\phi+(\pi/2)] = A_1 / \sin\phi$

Böylece gerilme $\sigma_V = F_V / A_{[\phi+(\pi/2)]} = F_n \sin\phi / (A_1 / \sin\phi) = (F_n/A_1) \sin^2\phi$

$$\sigma_V = \sigma_x \sin^2\phi$$

Burada hesapladığımız normal gerilmeleri σ_U ve σ_V toplayacak olursak:

$$\sigma_U + \sigma_V = \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_x \sin^2\phi = \sigma_x (\cos^2\phi + \sin^2\phi) \implies \sigma_U + \sigma_V = \sigma_x$$

Bu bağlantıların sınır değerlerini arayacak olursak normal gerilmeler σ_U ve σ_V için $\cos^2\phi = 1$ ve kayma gerilmesi τ için $\sin 2\phi = 1$ olması gereklidir. σ_U nun σ_{Umax} olması için $\cos^2\phi = 1$ yani $\phi = 0$ ve $\sin^2\phi = 0$ olması demektir.

Burada: $\sigma_1 = \sigma_{Umax} = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_{Vmin} = 0$ ve $\tau = \tau_{max}$ olması için $\sin 2\phi = 1$ yani $\phi = 45^\circ$ olması demektir. Böylece $\tau = \tau_{max} = \sigma_x / 2$ ve $\sigma_{Umax} = \sigma_{Vmax} = \sigma_x / 2$ olur.

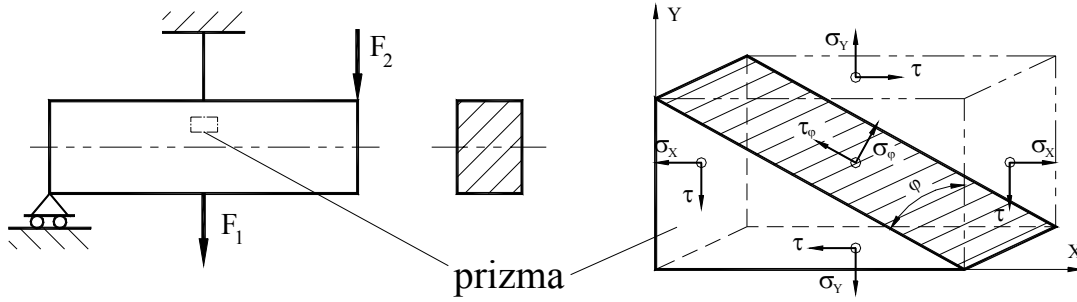
$$\tau_{max} = \sigma_{Umax} = \sigma_{Vmax} = \sigma_x / 2$$

Sonuç: Kuvvet eksenine dik olan kesitte beklenildiği gibi asal normal gerilme bir eksenli gerilme şeklindedir ve kayma gerilmesi sıfırdır. Birinci asal gerilme $\sigma_1 = \sigma_x = F_n/A_1$ dir. 45° lik eğik kesitte ise en fazla gerilme olasılığı vardır.

Şöyleki: $\tau_{max} = \sigma_{Umax} = \sigma_{Vmax} = \sigma_x / 2$

1.4.1.2. İki boyutlu veya iki eksenli, düzlem gerilme

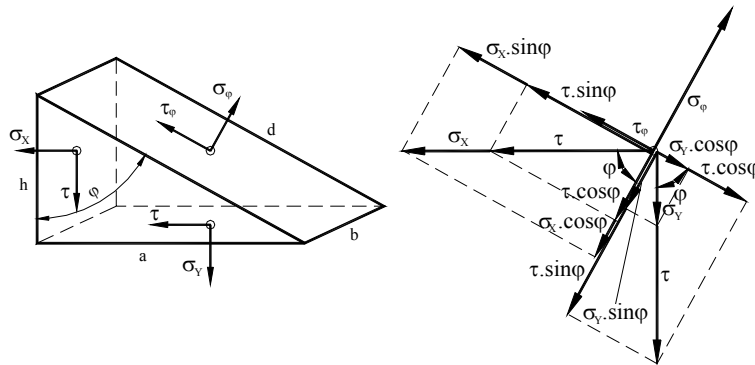
Burada problemi biraz daha genişleterek bir kirişten ufak bir prizma parçasını alıp inceleyelim. Bu prizmanın kiriş eksenine paralel olan bir yüzünün kenarlarını Şek. 1.42 de görüldüğü gibi koordinat sisteminin x ve y eksenleri olarak adlandıralım. Bu prizmanın yüzeyleri F_1 ve F_2 kuvvetleri ve kiriş eksenine dik olan yüzeyleri σ_x ve eksene paralel olan yüzeyleri σ_y ile ve bütün prizmanın yan yüzeyleri $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ tarafından etkilenir. Şek. 1.42 deki küçük prizma iki eksenli gerilme veya iki boyutlu gerilme için genelde gösterilen tipik örnektir.



Şek. 1.42, iki eksenli gerilme

Kirişi dik etkileyen F_1 kuvveti prizmada σ_y ile gösterilen çekme gerilmesini doğurur. Bunun yanında F_2 kuvveti prizmada belirli bir çapraz kuvvet ile eğilme momenti doğurur. Çapraz kuvvet çift olarak etki gösteren kayma, yani kesme gerilmesini doğurur. Bunun yanında σ_x normal gerilmesi eğilme momentinin etkisi ile meydana gelir.

Bu prizma dışındaki gerilmeler, doğal olarak prizmanın içindeki gerilmeleri doğurur ve onlarla eşdeğerdirler. Prizmanın köşegeninden geçen düzlemdaki iç gerilmeleri σ_ϕ ve τ_ϕ hesaplırsak bu gerilmelerin dış yüzeyleri etkileyen gerilmelerden daha fazla olduğunu görürüz, Şek. 1.43 Prizmanın bu köşegen düzlemindeki gerilmeleri bozulmadan taşıyacağı kesin olmadığı gibi, herhangi bir kırılmanın meydana gelmesi normal bir sonuçtur. Bütün köşegen düzlemindeki gerilmelerin yanında, dış düzlemlerdeki gerilmeler malzemenin emniyetli mukavemet değerlerinden küçük olabilirler.



Şek. 1.43, iki eksenli iç gerilmeler

Prizmaya etki eden bütün dış gerilmelerin doğurduğu iç kuvvetlerin statik denge kanununu gerçekleştirmesi gereklidir. Şek. 1.43 da görüldüğü gibi prizmanın içinde seçilen bir noktada bütün kuvvet veya gerilmeleri toparlar ve gerekli koordinat sistemini seçip mekaniğin denge kanunlarını kuralım:

$$\Sigma M = 0 \quad \Sigma F_n = 0 \quad \Sigma F_\phi = 0$$

Mekaniğin birinci denge kanunu $\Sigma M = 0$ 'a göre:

Dış normal gerilmelerin σ_x ve σ_y doğurduğu kuvvetler prizmanın ağırlık merkezinde kesiştiklerinden her hangi bir moment etkisi göstermezler.

Dış kayma gerilmelerinin doğurduğu çapraz kuvvetleri, ki bunlar kayma gerilmesi ile etkilediği alanın çarpımından doğarlar, prizmanın ağırlık merkezine kaydıralım. Çapraz kuvvetlerin doğurduğu kayma gerilmeleri $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ olduğundan buradaki momentlerin toplamı sıfır olur (Şek. 1.43).

$$\tau a b h / 2 = \tau h b a / 2$$

Mekaniğin ikinci denge kanunu $\Sigma F_n = 0$ 'a göre:

Mekaniğin ikinci denge şartında bu paralele analiz edilirse, düşünülen kesit düzlemindeki bütün normal kuvvetlerin toplamı sıfırdır.

$$\Sigma F_n = 0$$

$$F_{n\phi} = F_{n1} + F_{n2} + F_{n3} + F_{n4}$$

$F_{n\phi}$	$= F_{x\phi} \cos\phi$	$+ F_{xn} \cos\phi$	$+ F_{yn} \sin\phi$	$+ F_{y\phi} \sin\phi$
$\sigma_\phi = F_{n\phi} / A_\phi$	$\tau = F_{x\phi} / A_y$	$\sigma_x = F_{xn} / A_x$	$\sigma_y = F_{yn} / A_y$	$\tau = F_{y\phi} / A_x$
$A_\phi = d b$	$A_y = a b$	$A_x = h b$	$A_y = a b$	$A_x = h b$
$F_{n\phi} = d b \sigma_\phi$	$F_{x\phi} = a b \tau$	$F_{xn} = h b \sigma_x$	$F_{yn} = a b \sigma_y$	$F_{y\phi} = h b \tau$
$d b \sigma_\phi$	$= a b \tau \cos\phi$	$+ h b \sigma_x \cos\phi$	$+ a b \sigma_y \sin\phi$	$+ h b \tau \sin\phi$

$$d \sigma_\phi = a \tau \cos\phi + h \sigma_x \cos\phi + a \sigma_y \sin\phi + h \tau \sin\phi$$

$a = d \sin\phi$ ve $h = d \cos\phi$ olarak formülde yerleştirirsek,

$$d \sigma_\phi = d \sin\phi \tau \cos\phi + d \cos\phi \sigma_x \cos\phi + d \sin\phi \sigma_y \sin\phi + d \cos\phi \tau \sin\phi$$

$$\sigma_\phi = \tau \sin\phi \cos\phi + \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi + \tau \cos\phi \sin\phi$$

$$\sigma_\phi = \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi + 2 \tau \cos\phi \sin\phi$$

Mekanğin üçüncü denge kanunu $\Sigma F_c = 0$ 'a göre:

Mekanğin üçüncü denge şartında bu paralelde analiz edilirse, düşünülen kesit düzlemindeki bütün çapraz kuvvetlerin toplamı sıfırdır.

$$\Sigma F_c = 0$$

$$F_{c\phi} = F_{c1} + F_{c2} - F_{c3} - F_{c4}$$

$F_{c\phi}$	$= F_{ny} \cos\phi$	$+ F_{cx} \cos\phi$	$- F_{cy} \sin\phi$	$- F_{nx} \sin\phi$
$\tau_\phi = F_{c\phi} / A_\phi$	$\sigma_y = F_{ny} / A_y$	$\tau = F_{cx} / A_x$	$\tau = F_{cy} / A_y$	$\sigma_x = F_{nx} / A_x$
$A_\phi = d b$	$A_y = a b$	$A_x = h b$	$A_y = a b$	$A_x = h b$
$F_{c\phi} = d b \tau_\phi$	$F_{ny} = a b \sigma_y$	$F_{cx} = h b \tau$	$F_{cy} = a b \tau$	$F_{nx} = h b \sigma_x$
$d b \tau_\phi$	$= a b \sigma_y \cos\phi$	$+ h b \tau \cos\phi$	$- a b \tau \sin\phi$	$- h b \sigma_x \sin\phi$

$$d \tau_\phi = a \sigma_y \cos\phi + h \tau \cos\phi - a \tau \sin\phi - h \sigma_x \sin\phi$$

$a = d \sin\phi$ ve $h = d \cos\phi$ olarak formülde yerleştirirsek,

$$d \tau_\phi = d \sin\phi \sigma_y \cos\phi + d \cos\phi \tau \cos\phi - d \sin\phi \tau \sin\phi - d \cos\phi \sigma_x \sin\phi$$

$$\tau_\phi = \sigma_y \sin\phi \cos\phi + \tau \cos^2\phi - \tau \sin^2\phi - \sigma_x \cos\phi \sin\phi$$

$$\tau_\phi = \tau (\cos^2\phi - \sin^2\phi) + (\sigma_y - \sigma_x) \cos\phi \sin\phi$$

Burada maksimum ve minimum değerleri bulmak için birinci derecedeki diferansiyel denklemi sıfıra eşitlememiz gereklidir. Bu hesabı yapmak istersek:

$$\frac{d\sigma_\phi}{d\phi} = 0$$

$$\sigma_\phi = \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi + 2 \tau \cos\phi \sin\phi$$

$$(\sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi + 2 \tau \cos\phi \sin\phi) / d\phi = 0$$

$$-\sigma_x \sin 2\phi + \sigma_y \sin 2\phi - 2 \tau \cos 2\phi = 0$$

$$(-\sigma_x + \sigma_y) \sin 2\phi = 2 \tau \cos 2\phi$$

$$\frac{\sin 2\phi}{\cos 2\phi} = \frac{2 \tau}{-(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Böylece asal normal gerilmelerin şartı bulunur:

$$\tan 2\phi = -\frac{2 \tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Bu formülün analizini yaparsak:

Asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 birbirlerine diktirler ve $\tan 2\phi$ birbirinden 180° farklı iki açığı gösterir. Bunun yanında ϕ açısı birbirine 90° farklı iki eksen yönünü belirler.

Diğer taraftan çapraz kuvvetlerin hesabına devam edersek:

$$\tau_\phi = \tau (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + (\sigma_y - \sigma_x) \cos \phi \sin \phi$$

Trigonometri bilgimizi tazelersek;

$$\cos^2 \phi - \sin^2 \phi = \cos 2\phi \quad \text{ve} \quad \sin \phi \cos \phi = \sin 2\phi / 2$$

Bu bağıntıları τ_ϕ -formülünde yerleştirirsek:

$$\tau_\phi = \tau \cos 2\phi + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\phi$$

Asal normal gerilmelerin maksimum ve minimum şartı formülünü tekrar ele alıp işlersek:

$$\frac{\sin 2\phi}{\cos 2\phi} = \frac{2 \tau}{-(\sigma_x - \sigma_y)} \quad \text{ve buradan} \quad \sin 2\phi = -\frac{2 \tau \cos 2\phi}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Bu bulunan değeri yerleştirirsek:

$$\tau_\phi = \tau \cos 2\phi + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \frac{-2 \tau \cos 2\phi}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\tau_\phi = \tau \cos 2\phi - \tau \cos 2\phi = 0 \quad !...$$

Küçük bir prizma parçasını asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 etki edene kadar çevirdiğimizde kayma gerilmeleri sıfırdır.

ϕ düzlemindeki normal gerilmeler:

$$\sigma_{\phi} = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi + 2 \tau \cos \phi \sin \phi$$

Trigonometri bilgilerimizi tekrar tazelersek;

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\phi) \quad \text{ve} \quad \cos^2 \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi) \quad \text{ve} \quad 2 \sin \phi \cos \phi = \sin 2\phi$$

Bu bağıntıları ϕ düzlemindeki normal gerilmeler formülünde yerleştirirsek:

$$\sigma_{\phi} = \sigma_x \left(\frac{1}{2} \right) (1 + \cos 2\phi) + \sigma_y \left(\frac{1}{2} \right) (1 - \cos 2\phi) + \tau \sin 2\phi$$

$$\sigma_{\phi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau \sin 2\phi$$

ve iç teğet gerilme için; $\tau_{\phi} = \tau (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + (\sigma_y - \sigma_x) \cos \phi \sin \phi$

$$\tau_{\phi} = \tau \cos 2\phi + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\phi$$

$$\tau_{\phi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau \cos 2\phi$$

Eğer bu iki eşitlik formülünün karesini alıp beraber toplarsak Mohr'un (*mohr*) gerilmeler dairesini buluruz. Bu daire σ_{ϕ} ve τ_{ϕ} koordinat sisteminde bulunur:

$$\left(\sigma_{\phi} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau \sin 2\phi \right)^2$$

$$\tau_{\phi}^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau \cos 2\phi \right)^2$$

$$\left(\sigma_{\phi} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{\phi}^2 = (\cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi) \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]$$

Diğer taraftan : $\cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi = 1$

F. 34

$$\left(\sigma_{\phi} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{\phi}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2$$

σ_{ϕ}	N/mm ²	Kesit yüzeyindeki toplam normal gerilme
τ_{ϕ}	N/mm ²	Kesit yüzeyindeki toplam kayma gerilmesi
σ_x	N/mm ²	X-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	N/mm ²	Y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ	N/mm ²	Dış kayma gerilmesi

Bu formülü genel daire formülü ile karşılaştırırsak:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\left(\sigma_{\phi} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{\phi}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2$$

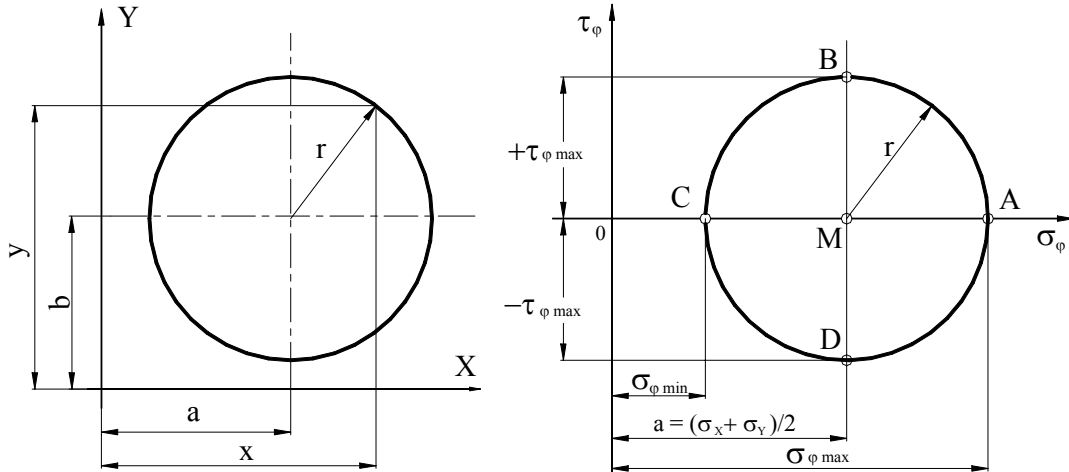
şu eşitlikleri saptarız:

$$x = \sigma_{\phi} \quad ; \quad a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$y = \tau_{\phi} \quad ; \quad b = 0$$

$$r^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2$$

Burada $b = 0$ demek, dairenin merkezinin koordinat sisteminin sıfır noktasında olduğunu gösterir. Genel formüldeki daire ile gerilmeleri gösteren Mohr'un gerilmeler dairesini çizecek olursak Şek. 1.44 de verilen daireleri buluruz.



Şek. 1.44, Genel daire ve Mohr'un gerilmeler dairesi

Mohr'un gerilmeler daresi üzerindeki her nokta parça üzerindeki bir kesiti gösterir (Şek. 1.44). Bu çember üzerindeki noktada kurulacak koordinat sistemi, o kesitteki iç gerilmeleri σ_ϕ ve τ_ϕ yi gösterir. A ve C noktaları koordinat sisteminin gösterdiği kesitteki maksimum ve minimum iç normal gerilmeleri, diğer deyimle ile asal normal gerilmeleri gösterir. Bu değerleri formülle göstermek istersek, şu bağıntıyı vermemiz gerekir.

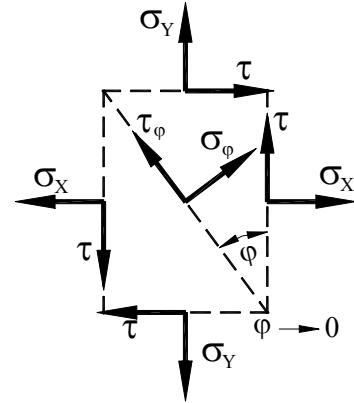
$$\sigma_{\phi_{\min}}^{\max} = a \pm r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

B ve D noktaları koordinat sisteminin gösterdiği kesitteki asal teğet gerilmeleri gösterir. Bu değerleri formülle göstermek istersek, şu bağıntıyı vermemiz gerekir.

$$\tau_{\phi_{\max}} = \pm r = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Burada incelenen prizmayı daraltacak olursak ϕ açısı gittikçe küçülür ve sonunda sıfır olur. Burada ϕ açısı sıfır olunca iç normal gerilmeler σ_ϕ asal normal gerilme σ_x olur. Aynı zamanda iç kayma gerilmeleride τ_ϕ dış kayma gerilmesine τ eşit olur.

Bu düşüncelerimizi gerilmeler daresi olarak göstermek istersek, şu yolu uygulamamız gereklidir. Bir koordinat sistemi seçelim. Bu koordinat sisteminde kayma gerilmeleri " τ_ϕ ", Y ekseninde ve normal gerilmeleri " σ_ϕ ", X ekseninde gösterelim. Çember üzerinde olması gerekli olan T noktasını da ϕ açısı ile kesit alınmış düzlem ve bu düzlemde bilinen iç normal gerilme σ_ϕ ve iç kayma gerilmesi τ_ϕ yi gösterdiğinden işaretleyelim. Diğer taraftan daire merkezi M nin σ_ϕ ekseninde olması gereklidir ve merkez noktası M nin koordinat sisteminin sıfır noktasından uzaklığı $a = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ kadardır. Böylece dairenin merkezi M noktası ve çember üzerindeki bir T noktası bilindiğine göre, dairenin çizimi yarıçap MT olarak gerçekleştirilir.



Şek. 1.45, gerilmeler prizması

A ve C noktalarının ordinat değeri $\phi = 0$ düzlemindeki kayma gerilmelerinin büyük-lüğünü gösterir. Bu değerler sıfırdır, çünkü A ve C noktaları x ekseninde üzerindedirler. Böylece $\phi = 0$ düzleminde yalnız asal normal gerilmelerin $\sigma_{\phi_{\max}}$ ve $\sigma_{\phi_{\min}}$ varlığı ve kayma gerilmesi sıfır olduğu görülür. Böylece iç kayma gerilmesi formülünü sıfıra eşit kabul edersek asal normal gerilmeleri buluruz, şöyle ki:

$$\tau_{\phi_0} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi_0 + \tau \cos 2\phi_0 = 0$$

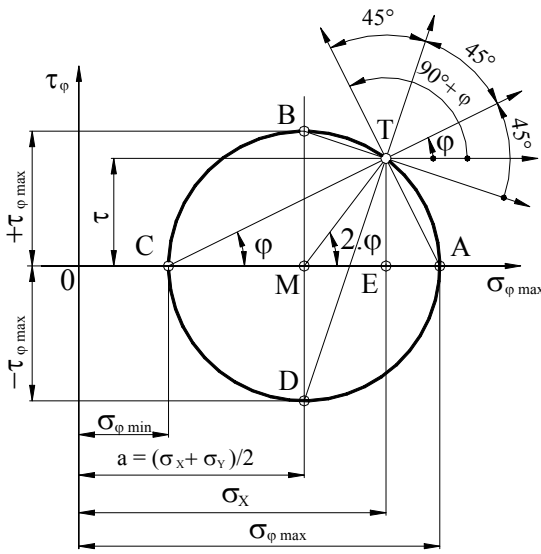
Burada trigonometri bilgimizi tazelerseniz, $\tan 2\phi_0$ değeri ile $\tan(180^\circ + 2\phi_0)$ değerinin aynı olduğunu ve arandılan ϕ açısının ϕ_0 ve $90^\circ + \phi_0$ olduğu, diğer deyimle birbirine dik iki açı arandığı ortaya çıkar.

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi_0 + \tau \cos 2\phi_0 = 0$$

$$\tau \cos 2\phi_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi_0$$

$$\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin 2\phi_0}{\cos 2\phi_0} = \tan 2\phi_0 = \tan(180^\circ + 2\phi_0)$$

$$\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan 2\phi_0 = \tan(180^\circ + 2\phi_0) = \tan TMA = \frac{TM}{ME}$$

Şek. 1.46, Özel ϕ açılı kesit için Mohr dairesi

TMA açısı 2ϕ açısı kadardır. Bilinen geometri kanununa göre aynı çember parçasını gören merkez açı o çember parçasını gören çevre açının iki katıdır. Buna göre TCA açısını hesaplamak istersek:

$$TCA = \frac{TMA}{2} = \frac{2\phi_0}{2} = \phi_0$$

Şek. 1.46 deki Mohr'un gerilmeler dairesini incelersek:

- CT doğrusu asal normal gerilmenin bulunduğu düzlemi ve C deki okunan X ekseninde de minimum asal normal gerilme $\sigma_{\phi \min}$ un değerini gösterir.

- AT doğru parçası CT doğrusuna diktir (*Tales teoremi*). Bundan dolayı asal normal (dik) kesit düzlemini belirler ve A noktasındaki değer asal normal gerilme $\sigma_{\phi \max}$ un değerini gösterir.

Böylece çember üzerindeki bir noktadan yapılan bağlantılar o noktanın belirlediği düzlemdeki ana gerilmeleri verir. Bu düşünce sonucu:

- BT ve DT den geçen doğrular ana kayma gerilmelerinin bulunduğu düzlemin yönlerini gösterir.

Şek. 1.46 deki Mohr dairesinden görüleceği gibi, asal normal gerilmelerin düzlemi ile ana kayma gerilmelerin düzlemi arasında 45° lik bir açı vardır. Çünkü: CTD çevre açısı aynı yayı gören 90° lik CMD merkez açısının yarısıdır.

Böylece ana kayma gerilmesinin asal normal gerilme düzleminde 45° lik bir açıda bulunan düzlemde olduğu görülür.

Mohr'un gerilmeler dairesi

Herhangi bir kesitteki gerilmelerin bilinmesi ile Mohr'un gerilmeler dairesi çizilerek bütün gerilmeler (örneğin; $\sigma_{1,2}$ bilinen σ_x , σ_y ve τ) arasındaki bağıntılar çabuk ve bilinçli olarak bulunur. Bunun içinde gerilmeleri içeren bir koordinat sistemi çizilmelidir. Bu sistemde Y eksenini kayma gerilmesini " τ ", X ekseninde normal gerilmeyi " σ " göstermelidir. Mohr'un gerilmeler dairesinin merkezinin koordinatlarının değeri:

$$Y = 0 \quad X = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Mohr'un gerilmeler dairesinin yarıçapının değeri:

$$r = \pm 0,5 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}$$

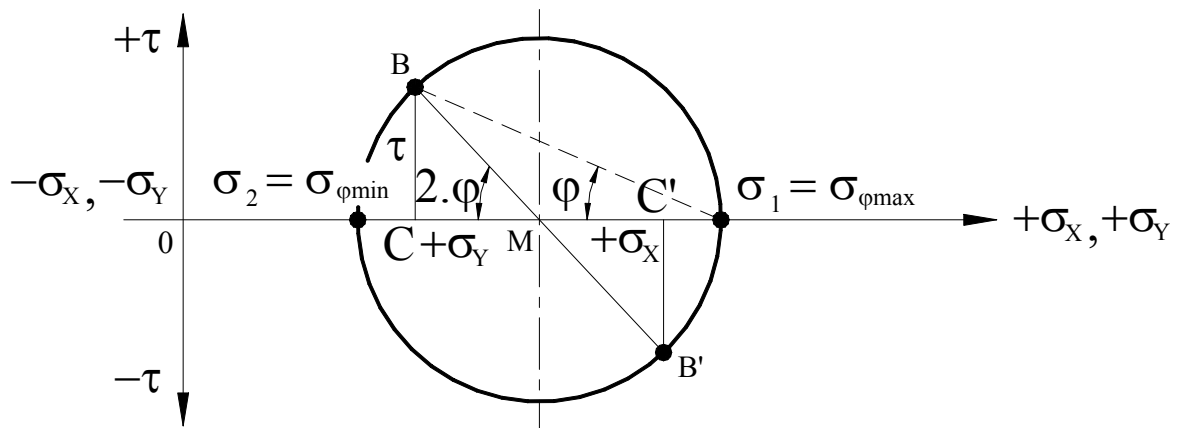
Bu daireye ilk defa Mohr tarafından bulunduğu için "**Mohr'un gerilmeler dairesi**" denir.

Mohr'un gerilmeler dairesi yardımı ile bir parçadaki gerilmeler arasındaki bağıntılar seri ve doğru olarak kurulabilir.

$$OC = \sigma_y \quad O'C = \sigma_x \quad CB = C'B = \tau$$

Örneğin : Verilenler $OM = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ $CM = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sigma_y = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

$$MB = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2} = 0,5 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} \quad \text{yarı çap}$$



Şek. 1.47, Mohr'un gerilmeler dairesi

Mohr'un gerilmeler dairesi çizildikten sonra aranılan değerler ya doğrudan çizimden alınır veya aşağıda verilen formülle hesaplanır. Örneğin: σ_1 , σ_2 , τ_{\max} ve ϕ açısı an değerleri.

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2$$

formülü ile maksimum kayma gerilmesi hesaplanır. Bu hesaplanan değer, asal normal gerilmeler düzlemi ile 45° lik açısı olan düzlemdeki, kayma gerilmesinin değeridir.

$$\tau = \tau_x = \tau_y$$

formülü ile birbirine dik olan iki düzlemdeki kayma gerilmeleri hesaplanır. Bu değerlerin gerçekten birbirine eşit olduğu görülür.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

formülünde normal gerilmelerin toplamının, düzlem değişmesine rağmen değişmez olduğu görülür.

Bunun tam tersi eğer σ_1 , σ_2 ve $\tau = 0$ değerleri verilmişse, σ_x , σ_y ve τ değerleri Şek. 1.47 deki Mohr'un gerilmeler dairesinden çok çabuk bulunur.

$$\sigma_{x,y} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\phi$$

$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\phi$$

Pratikte görülen örneklerde σ_y genelde sıfırdır ve parça genelde yalnız normal gerilme σ_x ve kayma gerilmesi τ in etkisindedir. Bu durumu formülle gösterelim:

Karşılaştırma gerilmesi olarak normal gerilme:

F. 35

$$\sigma_{1,2} = 0,5 \cdot \left(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau^2} \right)$$

ve kayma gerilmesi olarak:

F. 36

$$\tan 2\phi = -2 \cdot \frac{\tau}{\sigma_x}$$

$\sigma_{1,2}$ N/mm²

Kayma gerilmelerinin sıfır olduğu asal normal gerilmeler

σ_1 maksimum (+ işareti ile) asal normal gerilme ve

σ_2 minimum asal normal gerilme

σ_x N/mm²

x eksen yönündeki normal gerilme

τ N/mm²

bilinen kayma gerilmesi

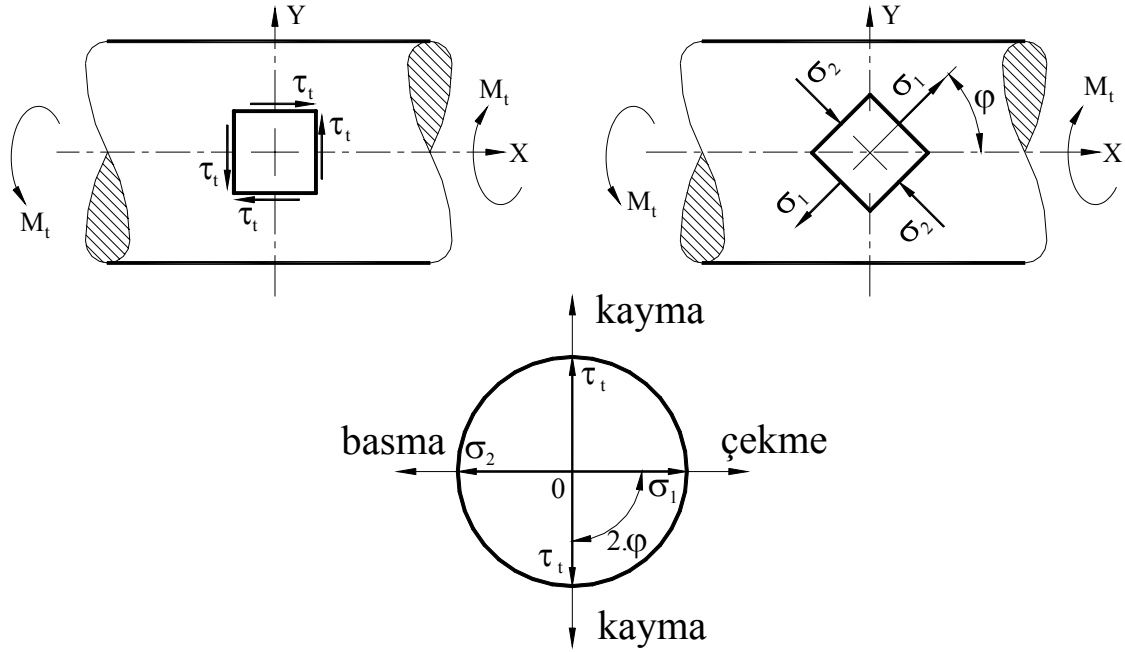
ϕ °

asal koordinat sistemi eksen ile gerilmenin hesaplandığı kesit düzlemini gösteren eksen arasındaki açı

Mohr'un gerilme dairesi için örnek

Bir mil, torsiyon momenti etkisinde olsun. Bu mildeki asal normal gerilmelerin büyüklüğü ne kadardır ?

Milin herhangi bir yüzey noktasındaki torsiyon, diğer deyimini ile kayma gerilmeleri çok kolay hesaplanır. Bu hesaplanan değerlerle belirli bir ölçekte Mohr'un gerilmeler dairesi çizilir (Şek. 1.48). Bu çizilen daireden istenilen gerilmeler okunur.



Şek. 1.48, Torsiyon etkisindeki mil

Hesaplanan veya bilinen torsiyon gerilmesi, kayma gerilmesi olarak kabul edilip, Mohr'un gerilmeler dairesi çizilirse, koordinat sistemine göre simetrik olan bir daire elde edilir. Buradan istenilen değerler derhal okunabilir, şöyle ki:

$$\tau_t = \sigma_1 = |\sigma_2|$$

Bu sonucu pratikte görebiliriz. Eğer sertleştirilmiş, sert veya gevrek malzemeden yapılmış bir mili torsiyon momenti ile etkilersek, bu etkiyi değiştirecek başka hiçbir çevre veya sistem etkisi yoksa, mil dönüş (rotasyon) eksenine 45° eğik bir spiral düzlemden çatlaklar veya kırılır.

1.4.2. Bileşik zorlanma hipotezleri

Mohr'un gerilmeler dairesinde iç gerilmelerin dış gerilmelerden daha fazla olabileceğini gördük.

Pratikte malzemenin bilinen mukavemet değerleri tek eksenli zorlanma diğer deyimini ile basit, bileşik olmayan zorlanmalar sonucu elde edilen değerlerdir. Bundan dolayı çok eksenli düzlem gerilimlerinde karşılaştırma gerilimi adı altında tek eksenli gerilimlere çevrilmelidir.

Bu çevirme işlemleri için mukavemet kanunları yoktur. Bu çevirme işlemleri çeşitli hipotezlere, diğer anlamı ile teknik ve matematiksel olarak ispatlanmamış, fakat bir sürü deney sonucu kanıtlanmış kabullerdir. Böyle hipotezle hesaplanan değere ya "karşılaştırma gerilimi" veya "indirilmiş gerilim" adı verilir.

Bu hipotezlerin doğması parçanın zorlanma etkisinde kırılıp kopmasının nedeni olarak bir zorlanma biçiminin kabulü ile başlar. Parçanın zorlanma biçimi, yüklenmenin cinsi, malzeme ve parçanın şekillendirilmesine göre çeşitli hipotezler pratikte kullanılabilir. Değerler verirler. Hipotezlerin kullanılma yerini seçmekte pratikteki sonuçların değerlendirilmesi büyük rol oynar.

Zamanla aşağıda sıralanmış olan bileşik zorlanma hipotezleri ortaya atılmıştır. Bunlardan yalnız kalın yazılmış ve altı çizilmiş olanları burada biraz ayrıntılı inceleyeceğiz.

- ◆ **Normal gerilme hipotezi NHG**
- ◆ **Kayma gerilmesi hipotezi KHG**
- ◆ Genişletilmiş kayma gerilmesi hipotezi
- ◆ En büyük uzama hipotezi
- ◆ Genişletilmiş uzama hipotezi
- ◆ Şekil değiştirme hipotezi
- ◆ **Biçim değiştirme enerjisi hipotezi BEH**
- ◆ EMPA zorlanma hipotezi
- ◆ Hacim ve kafes gerilmesi hipotezi

Bu bir sürü hipotezden pratikte yalnız üç tanesi kendini kabul ettirecek sonuçlar vermiştir. Bunun içinde burada bu üç hipotezi ayrıntılı görelim. Bu hipotezlerden **Normal gerilme hipotezi** ile **Kayma gerilmesi hipotezi** ile hakiki iç gerilmeler tek tek elde edilirken, **Biçim değiştirme enerjisi hipotezi** ile bütün etki eden gerilmelerin toplamı bulunur.

1.4.2.1. Normal gerilme hipotezi, NGH

Bu hipotezin kuruluşunda **Lamè (Lâme)**, **Maxwell (Maksvel)**, ve bir çok bilgin çalışmalarda bulunmuşlardır. Bu hipotezde, kırılma nedeni olarak "**en büyük asal normal gerilme**" kabul edilir. Bu hipotezde karşılaştırma gerilmesi olarak en büyük

asal normal gerilme hesaplanır. Bu hesaplanan değer malzemenin emniyetli mukavemet değeri ile karşılaştırılır ve karar verilir. Burada hesaplanan değer, malzemenin zorlanma biçimi ve yüklenme cinsi ile bağıntılı emniyetli mukavemet değerinden büyük olmaması gereklidir.

Pratikte kullanmak için şu kabulleri yaparsak: $\sigma_3 = 0$ ve $\sigma_1 > \sigma_2$, diğer deyim ile iki eksenli veya düzlem gerilme biçimi için:

$$\sigma_{kar} = \sigma_{\phi \max} = \sigma_1 = 0,5 \cdot \left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2} \right] \leq \sigma_{EM}$$

Bu hipotez pik döküm (kır döküm) gibi gevrek malzemelerde, çok sert çeliklerde, kaynak bağlantılarında, seramiklerde, çeşitli çekme, eğilme ve torsiyon gibi zorlamalarda kullanılır.

Günlük hesaplarda çoğu zaman eğilme ve torsiyon zorlamaları beraber görülür. Bu durumlarda yalnız bir normal gerilme σ ve bir kayma gerilmesi etkilidir. Bundan dolayı hesap formülü çok daha basite indirgenir:

$$F. 37 \quad \sigma_{kar} = 0,5 \cdot \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \right) \leq \sigma_{EM}$$

Burada yalnız normal gerilme etkense sonuç $\sigma_v = \sigma$ ve yalnız kayma gerilmesi etkense sonuç $\sigma_v = \tau$ olur. Bunun sonucu olarak bu hipotez aşağıdaki orantıyı kanıtlayan malzemeler için geçerli olur. Bu orantı şöyledir:

$$F. 38 \quad \eta = \frac{\sigma_{KO}}{\tau_{KO}} = 1$$

σ_{KO}	N/mm ²	Malzemenin bir eksenli normal gerilme altında kopma mukavemeti
τ_{KO}	N/mm ²	Malzemenin bir eksenli torsiyon gerilmesi altında kopma mukavemeti
η	1	Mukavemet oranı

Bu oran pratikte çok ender rastlanan durumdur. Yalnız gevrek, çok sert ve çok zor deforme olan malzemelerde rastlanır. Diğer taraftan eğer bir sünek malzeme çok eksenli gerilmeler etkisindeyse veya bir noktada birleşen kaynak dikişleri ile genelde bütün kaynak bağlantılarındaki kaynak dikişleri için geçerli olabilir. Prof. Bach tarafından öne sürülen bu hipotez bu güne kadar deneyler ile onaylanmamıştır.

Pratikte görülen oran şudur:

$$\eta = \frac{\sigma_{KO}}{\tau_{KO}} = 1,3$$

1.4.2.2. Kayma gerilmesi hipotezi, KGH

Bu hipotezin kuruluşunda **von Guest** (*fon Güst*), **Mohr, Tresca** (*Treska*) ve bir çok bilgin çalışmalarında bulunmuşlardır. Bu hipotezde, kırılma nedeni olarak "**en büyük kayma gerilmesi**" kabul edilir. Bu hipotezde karşılaştırma gerilmesi olarak en büyük kayma gerilmesi hesaplanır. Bu hesaplanan değer malzemenin emniyetli mukavemet değeri ile karşılaştırılır ve karar verilir. Burada hesaplanan değer malzemenin zorlanma biçimi ve yüklenme cinsi ile bağıntılı emniyetli mukavemet değerinden büyük olmaması gereklidir. Bu hipotezin deneylerle onayı, gevrek malzemenin dış basma gerilmesi etkisinde olduğu zaman görülmüştür.

$$\sigma_{kar} = 2 \tau_{max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2} \leq \sigma_{EM}$$

Eğer yalnız kayma gerilmesi etkense ve normal gerilmeler sıfır ise o zaman:

$$\sigma_{kar} = 2 \tau$$

Eğer yalnız bir eksenli normal gerilme ve kayma gerilmesi etkense, o zaman:

F. 39

$$\sigma_{kar} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \leq \sigma_{EM}$$

Bu hipotez aşağıdaki orantıyı onaylayan malzemeler için geçerlidir:

$$\eta = \frac{\sigma_{KO}}{\tau_{KO}} = 2$$

Bu orantı pratikte sünek malzemelerde, özellikle belirli ve kesin akma mukavemet değeri olan malzemelerde görülür ve bu özellikteki malzemeler için geçerlidir.

1.4.2.3. Biçim değiştirme enerjisi hipotezi, BEH

Bu hipotezin kuruluşunda **von Mises** (*fon Mises*), **Huber** (*Huber*) ve bir çok bilgin çalışmalarında bulunmuşlardır. Bu hipotezde kırılma sebebi olarak biçim değiştirme işi değerinin belirli bir sınırı aşması "**Biçim değiştirme enerjisi**" olarak kabul edilir. Bu hipotez genelde sünek malzemeler için kullanılır. Parçanın kopup bozulması, kayma şekil değiştirmesine veya sarsılmaya bağlanır.

Bu hipotez hadde ve dövme malzemelerinde doğru olarak kullanılır. Burada hesaplanan değer malzemenin emniyetli mukavemet değeri ile karşılaştırılır ve karar verilir. Burada hesaplanan değer malzemenin zorlanma biçimi ve yüklenme cinsi ile bağıntılı emniyetli mukavemet değerinden büyük olmaması gereklidir.

İki eksenli, diğer deyişle düzlem gerilmede, karşılaştırma gerilmesi şu şekilde hesaplanır:

$$\sigma_{kar} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau^2} \leq \sigma_{EM}$$

Eğer yalnız bir eksenli normal gerilme σ ve kayma gerilmesi τ etkense, o zaman:

$$\sigma_{kar} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau)^2} \leq \sigma_{EM}$$

Yalnız kayma gerilmesi etken olursa $\sigma = 1,732 \tau$ bağıntısı bulunur. Bu demektirki bu hipotez

$$\eta = \frac{\sigma_{KO}}{\tau_{KO}} = 1,732$$

orantısını onaylayan malzemeler için geçerlidir.

Biçim değiştirme enerjisi hipotezi bir sürü olayda geçerli bir hipotez olup bir sürü pratik deney ve sonuçları tarafından onaylanmıştır.

1.4.2.4. Zorlanma katsayısı, hipotezlerin düzeltilmesi

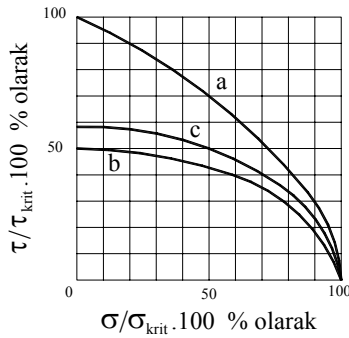
Karşılaştırma gerilmesinin hesaplanmasında bütün hipotezlerde yalnız kayma gerilmesinin etken olması halinde şu bağıntı geçerlidir:

$$\sigma_{KO} = \eta \tau_{KO}$$

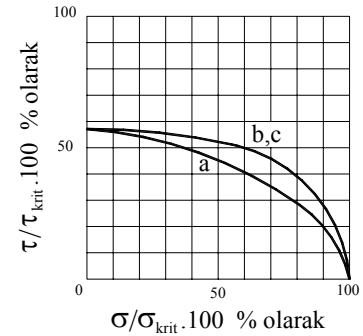
bu bağıntıda kullanılacak hipoteze göre ;

$$1 \leq \eta \leq 2$$

bağıntısı geçerlidir. Buradaki kopma mukavemet değerleri aynı zamanda "**sınır mukavemet değerleri**" olarak adlandırılır. Bu demektir ki: hesabı yapılacak parçada mukavemet oranı η kontrol edilip, duruma uyan hipotez kullanılmalıdır. Fakat bu oldukça pratikten uzak bir yoldur. Şek. 1.49 de düzlem, diğer adıyla iki eksenli gerilmelerdeki normal gerilme σ ile kayma gerilmesi τ arasındaki sınır mukavemet eğrileri görülmektedir.



Şek. 1.49, Tek tek mukavemet hipotezleri için ve Zorlanma katsayısı



Şek. 1.50, Zorlanma katsayısı α_0 ile düzeltilmiş sınır mukavemet diyagramları

Karşılaştırma gerilmesini malzemenin emniyetli mukavemet değeri yerine, malzemenin tek eksenli gerilme ile kopmasını gösteren normal mukavemet değeri ile " **malzemenin kritik mukavemet değeri** " adı altında karşılaştırır ve bunu normal gerilme hipotezi için yazacak olursak:

$$\sigma_{kar} = 0,5 \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \right) \leq \sigma_{Krit}$$

elde ederiz.

Böylece sınır mukavemet eğrisi fonksiyonu şu şekilde gösterilir:

$$\left(\frac{\tau}{\sigma_{Krit}} \right)^2 = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{Krit}}$$

Diğer hipotezler içinde aynı düşünce ile benzer bağıntılar bulunur. Bütün diğer hipotezler için uygun düzeltme faktörleri bulunmalıdır. **Prof. CBach** bu düzeltme faktörünü pratikte hipotezler arası pek önemli olmayacak kadar farklılıkla zorlanma katsayısı olarak şöyle anlatmıştır:

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{SEK}}{\eta \tau_{SEK}}$$

Böylece bütün kullanılan hipotezlerde kayma gerilmesi τ zorlanma katsayısı α_0 ile beraber diğer bir deyimle τ yerine $\alpha_0 \tau$ kullanılmalıdır.

Zorlanma katsayısı α_0 doğru olarak şekillenme mukavemet değerleri σ_G ve τ_G ile hesaplanır. Bu diğer deyimle zorlanma katsayısının yalnızca parçanın malzemesinin mukavemeti ile değil, parçanın malzemesinin mukavemetinin yanında şekillendirilmesi ve zorlanma durumunda bağıntılı olduğunu gösterir.

Mil hesaplarında çoğunlukla biçim değiştirme enerjisi hipotezi kullanıldığından, genelde bu hipotez için zorlanma katsayısı α_0 şu şekilde hesaplanır:

F. 40

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{EGDG}}{1,732 \tau_{DAL}}$$

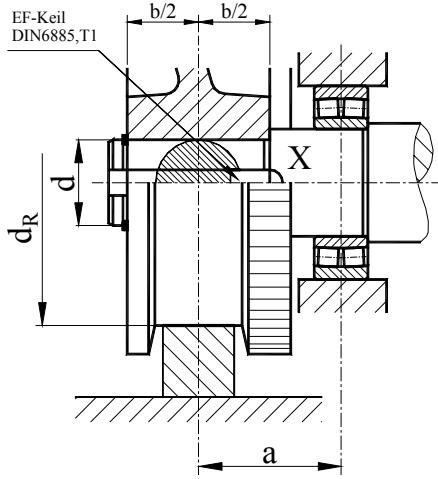
σ_{EGDG}	N/mm ²	Değişken eğilme mukavemeti
τ_{DAL}	N/mm ²	Dalgalı kayma mukavemeti

Pratikte	$\alpha_0 = 0,7$	Eğilme III, Torsion II veya I
	$\alpha_0 = 1,0$	Eğilme ve Torsion aynı
	$\alpha_0 = 1.25$	Eğilme I, Torsion II veya III

değerleri alınır.

1.4.2.5. Bileşik zorlanma için örnekler

BZ1 Elektrik motoru ile tahrik edilen bir vinç arabası yürüyüş milinin kontrolü.



Şek. 1.51, Tekerlek

Bilinen değerler:

Malzeme : St70-2, W.Nr.:1.0070,

Yüzey kabalığı $R_z = 10 \mu\text{m}$.

Çap $d = 60$

Eğilmementi $M_b = 1100 \text{ Nm}$

Torsiyon momenti $M_t = 300 \text{ Nm}$

Yürüyüş tahriki. Eğilme ve torsiyon momenti çift yönlü, böylece:

Zorlanma katsayısı $\alpha_0 = 1$

Çözüm :

BEH ya göre hesaplanan moment:

$$M_{he} = \sqrt{M_{eg}^2 + 0.75 \cdot (\alpha_0 \cdot M_t)^2}$$

$$M_{he} = \sqrt{1100^2 + 0.75 \cdot (1 \cdot 300)^2}$$

$$M_{he} = \underline{\underline{1130 \text{ N}}}$$

Milin karşıkoyma momenti

$$W_{eg} = \frac{\pi \cdot d_{he}^3}{32} \quad W_{eg} = \frac{\pi \cdot 53^3}{32}$$

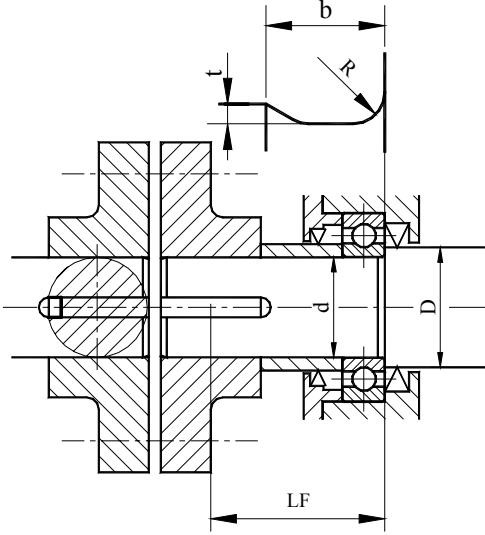
$$W_{eg} = \underline{\underline{14616 \text{ mm}^3}}$$

Mildeki karşılaştırma gerilimi

$$\sigma_{kar} = \frac{M_{he}}{W_{eg}} \quad \sigma_{kar} = 1130 / 14616 = 77,33$$

BEH ya göre mildeki karşılaştırma gerilimi (von Mises) $\sigma_{kar} = \underline{\underline{77 \text{ N/mm}^2}}$

BZ1 Şek. 1.52 de verilmiş olan iş makinası ara milinin kontrolünü yapınız.



Şek. 1.52, Kavrama

Bilinen değerler:

Malzeme : St60-2, W.Nr.:1.0060,

Yüzey kabalığı $R_z = 25 \mu\text{m}$.

Çaplar $d = 60$;

$D = 75 \text{ mm}$

Yarı çap $R = 0,6 \text{ m}$

Eğilmementi $M_b = 850 \text{ Nm}$

Torsiyon momenti $M_t = 700 \text{ Nm}$

Zorlanma katsayısı $\alpha_0 = 1$

Çözüm :

BEH ya göre hesaplanan moment:

$$M_{he} = \sqrt{M_{eg}^2 + 0.75 \cdot (\alpha_0 \cdot M_t)^2}$$

$$M_{he} = \sqrt{850^2 + 0.75 \cdot (1 \cdot 700)^2}$$

$$M_{he} = \underline{\underline{1044 \text{ N}}}$$

Milin karşıkoyma momenti

Kama derinliği $t = 7 \text{ mm}$, böylece $d_{he} = 60 - 7 = 53 \text{ mm}$

$$W_{eg} = \frac{\pi \cdot d_{he}^3}{32} \quad W_{eg} = \frac{\pi \cdot 53^3}{32}$$

$$W_{eg} = \underline{\underline{14616 \text{ mm}^3}}$$

Mildeki karşılaştırma gerilimi

$$\sigma_{kar} = \frac{M_{he}}{W_{eg}} \quad \sigma_{kar} = 1044 / 14616 = 71,43..$$

BEH ya göre mildeki karşılaştırma gerilimi (von Mises) $\sigma_{kar} = \underline{\underline{71 \text{ N/mm}^2}}$

2. Konu İndeksi

Asal gerilme.....	1.32	Kesme gerilmesi için örnekler.....	1.25
Asal normal gerilmeler	1.31, 1.39	Kesmeye zorlanma.....	1.24
Asal teğet gerilmeler.....	1.39	Lamè	1.44
Bach	1.45, 1.48	Maxwell	1.44
Basma gerilmesi.....	1.6	Mohr	1.46
Basma gerilmesine örnekler.....	1.7	Mohr'un gerilme dairesi için örnek.....	1.43
Basmaya zorlanma	1.6	Mohr'un gerilmeler dairesi 1.37, 1.38, 1.39, 1.41	
Biçim değiştirme enerjisi hipotezi	1.29	Narinlik derecesi.....	1.15
Biçim değiştirme enerjisi hipotezi, BEH	1.46	Narinlik sınırı.....	1.16
Bileşik zorlanma	1.29	Nominal gerilme	1.3
Bileşik zorlanma hipotezleri	1.44	Normal gerilme hipotezi, NGH	1.44
Bir boyutlu gerilme.....	1.31	Normal gerilmeler hipotezi.....	1.29
Bir eksenli gerilme.....	1.30, 1.31	Omega yöntemi.....	1.17
Burkulma.....	1.14	Parçanın zorlanması.....	1.3
Burkulma için örnekler	1.18	Plastik değişme	1.3
Burulma gerilmesi.....	1.26	Sınır mukavemet değerleri.....	1.47
Burulmaya zorlanma.....	1.26	Sürtünme kuvveti.....	1.10
Çekme gerilmesi	1.4	Sürtünme kuvveti için örnekler	1.11
Çekme gerilmesine örnekler	1.5	Tetmajer	1.16
Çekmeye zorlanma	1.4	Toplam kayma gerilmesi	1.29
Düzlem gerilme.....	1.33	Toplam normal gerilme	1.29
Eğik kesitteki gerilmeler.....	1.32	Torsiyon	1.26
Eğilme gerilmesi.....	1.20, 1.22	Torsiyon gerilmesi.....	1.26, 1.28
Eğilme gerilmesi için örnekler	1.21	Torsiyon gerilmesi için örnekler.....	1.27
Eğilmeye zorlanma	1.20	Tresca.....	1.46
Elastik değişme	1.3	tutuk sürtünme kuvveti	1.10
Euler.....	1.14	Von Guest	1.46
Flambaj	1.14	Von Mises.....	1.46
Flambaj için örnekler.....	1.18	Yüzey basıncı	1.8
Hertz.....	1.12	Yüzey basıncı için örnekler	1.9
Hertz basıncı için örnek	1.13	Zorlanma katsayısı α_0	1.47
Huber	1.46	Zorlanmalar.....	1.3
İki boyutlu gerilme.....	1.33		
İki eksenli gerilme	1.30, 1.33		
Jäger	1.17		
Karşılaştırma gerilimi	1.44		
Karşılaştırma gerilmesi.....	1.29		
Kayma gerilmesi hipotezi, KGH	1.46		
Kayma sürtünme kuvveti	1.10		
Kesme gerilmesi	1.24		

