İlk yayın, 14 Nisan 2016

www.guven-kutay.ch

YAPI STATİĞİ

Stabilite 1, Burkulma

44-08-1

Bu dosyayı ***44_00_Yapı Statiğine Giriş ve Özet*** dosyasıyla beraber incelerseniz daha iyi anlarsınız.

M. Güven KUTAY, Muhammet ERDÖL

En son durum: 9 Ekim 2016

M.İnan ve Timoshenko nun önerdiği çözüm yollarınıda görmek isterseniz:

Makina Mühendisleri Odası yayınlarından,

"Vinçlerde Çelik Konstrüksiyonlar, Cilt I ve Cilt II, MMO/2008/483,
Serpil KURT – Remzi ASLAN – Güven KUTAY "

kitaplarına bakınız. Satın almanızı öneririm. Kitap kitaptır. Hemde çok ucuz.

DİKKAT:

Bu çalışma iyi niyetle ve bugünün teknik imkanlarına göre yapılmıştır. Bu çalışmadaki bilgilerin yanlış kullanılmasından doğacak her türlü maddi ve manevi zarar için sorumluluk kullanana aittir. Bu çalışmadaki bilgileri kullananlara, kullandıkları yerdeki şartları iyi değerlendirip buradaki verilerin yeterli olup olmadığına karar vermeleri ve gerekirse daha detaylı hesap yapmaları önerilir. Eğer herhangi bir düzeltme, tamamlama veya bir arzunuz olursa, hiç çekinmeden bizimle temasa geçebilirsiniz.

Statik dosyalarında kullandığımız terimlerin Almancadan Türkçe karşılığını, ne Türk Dil Kurumunda nede normal veya elektronik sözlüklerde bulamadık. Hedefimiz Türkçe bilen ve temel bilgisi az dahi olan kütleye basit olarak bilgileri aktarmak olduğu için, kendi mantığımıza göre okuyucunun anlayacağı, basit Türkçe terimler kullandık. Ayrıca 44-00 numaralı dosyada Türkçe-Almanca(-İngilizce-Fransızca) sözlük ile Kaynakları verdik. İsteyen oradan kullanılan Türkçe terimleri bulabilir. Bilginiz ola!..

Terimlerin Türkçe karşılığı için büyük yardımı olan sayın Muhammet ERDÖL e kendim ve dosyadan faydalanacakların adına çok teşekkür ederim.

İ Ç İ N D E K İ L E R

0. Semboller ve birimleri 5

0.1. Giriş 9
0.2. Konstrüksiyon grupları 10

1. Burkulma teorisi 11

1.1. İdeal burkulma 11
1.1.1. Elastik eğri diferansiyel denkleminin basit olarak türemesi 11
1.1.2. Elastik eğri diferansiyel denkleminin 2.dereceli hesaplama kuralına göre türemesi 13
1.1.3. Euler halleri 14
1.1.3.1. Deneylerle Euler hallerinin şeklinin bulunması 15
1.1.4. Burkulmada stabilite problemleri 16
1.1.4.1. Genişletilmiş denge problemi 16
1.1.4.2. Elastiklik problemi 17
1.1.4.3. Çapraz kuvvet ve moment problemi 19
1.1.4.4. Gerilme problemi 21
1.1.4.5. Taşınan yük problemi 24
1.1.5. Burkulmanın analizi 25
1.2. Vianello metodu 28
1.2.1. Vianello metodunda çözüm yolu 28
1.2.2. Burkulma kuvveti "F_{kr}" nin hesabı 29
1.2.3. Vianello metodu için örnek 1, Çapraz kuvvet ile 30
1.2.3.1. Kritik burkulma kuvveti "F_{kr}" 32
1.2.3.2. Serbest uçdaki yaklaşık toplam sehim 33
1.2.3.3. Sabit uçdaki yaklaşık moment 33
1.2.3.4. Yaklaşık burkulma boyu "L_{By}" nin hesabı 33
1.2.4. Vianello metodu için örnek 2, mit Querlast 34
1.2.4.1. Vianello metodu için örnek 36
1.2.4.2. Toplam deformasyon "w_{top}" ın hesabı 39
1.2.4.3. Burkulma boyu "L_B" nin hesabı 39
1.2.4.4. Toplam deformasyon "w_{top}" ın ve toplam moment "M_{top}" ın hesabı 39
1.3. Rayleigh-Ritz metodu 40
1.3.1. Rayleigh-Ritz metodu için örnek 41
1.4. Enerji metodu 42
1.4.1. İç kuvvetlerin potansiyeli "$\Phi_{iç}$" 42
1.4.2. Dış kuvvetlerin potansiyeli "$\Phi_{dı}$" 43
1.4.3. Enerji metodu için örnek 43
1.5. Galerkin metodu 45
1.6. Vianello ve Enerji metoduna teorik örnek 46

2. Pratikte burkulma hesabı DIN 18800-2 50

2.1. Basma ve eğilme etkili çubuklarda burkulma mukavemet hesabı 50
2.2. Basma ve iki eksenli eğilme etkili çubuklarda burkulma mukavemet hesabı 51
2.3. Tek çubuklar için sayısal örnekler 52
2.4. Çerçeve sistemler 53
2.4.1. Çerçevelerde Euler burkulma kuvvetinin analitik hesabı 53
2.4.2. Çerçevelerde dayanak kuvvetleri ve moment dağılımı 55
2.4.3. Çerçevelerde Euler burkulma kuvvetinin Vianello metoduyla yaklaşık hesabı 57

2.4.3.1. Örnek 1, Çerçevenin sabit kesitli çubuğu 57
2.4.3.2. Örnek 2, Çerçevelerin sabit kesitli ortak çubuğu....59
2.4.3.2.1. Birinci düzlem, xz düzleminde çubuk....59
2.4.3.2.2. İkinci düzlem, xy düzleminde çubuk....61
2.4.3.2.3. İki düzlem sonuçlarının karşılaştırılması 63
2.5. Çerçeveler için sayısal örnekler 64
3. Formüller özet....65
4. Konu İndeksi 68

Önsöz

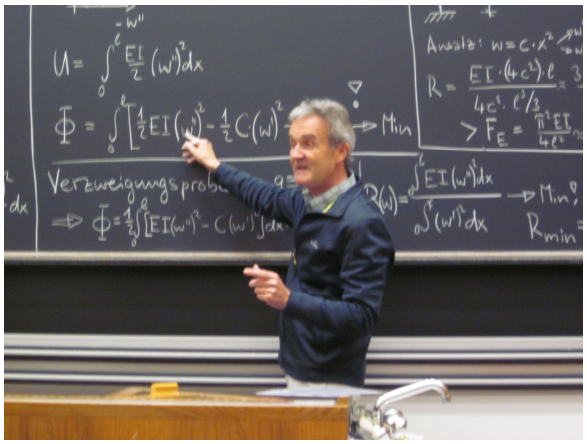
Bu dosyada burkulma probleminin teorisi sayın ***Prof. Dr. Peter Marti***' nin ve ***Dr. Simon Zweidler in ETH Zürih üniversitesindeki*** ders notları temel olarak alınmış ve daha detaylı işlenmiştir. Pratikte burkulma hesabı memleketimizde Alman standartı DIN e göre yapılır.

Görüleceği gibi hesaplar çeşitli metotlarla yapılmaktadır. Bu çeşitlilik sizi ne şaşırtsın, nede korkutsun. Pratikte konstrüktör kendine ve çalıştığı ortama uyan bir hesap metodu seçer ve bu metotla hesaplarını yapar. Sizde kendinize göre bir hesap metodu seçip, hesaplarınızı bu metotla yapınız.

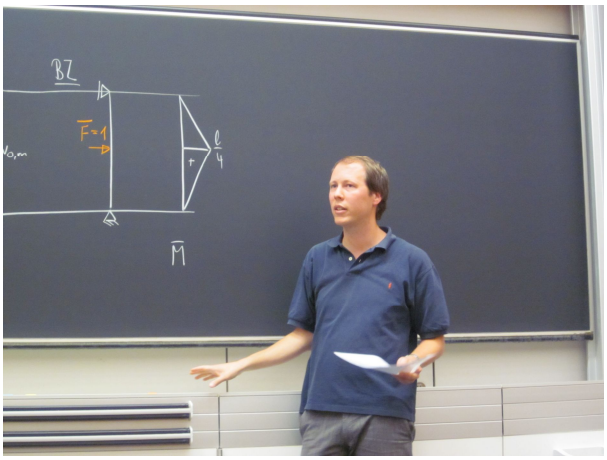
Hayat daima bin imkan içinden bir imkanı seçip diğer 999 imkanı kaçırmakla geçer. Bu temel kaidedir. Buradada bu kanun geçerlidir.

Sizlere mutlu ve başarılı hayat dilerim.

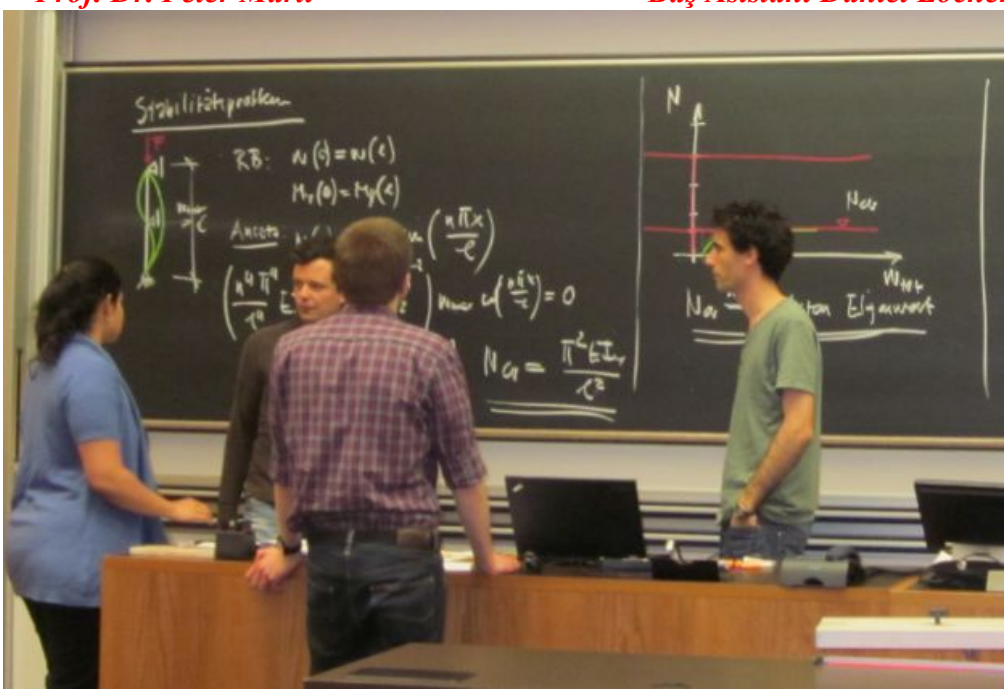
M. Güven KUTAY



Prof. Dr. Peter Marti'



Baş Asistanı Daniel Locher



Dr. Simon Zweidler + Baş Asistanı Severin Haefliger

0. Semboller ve birimleri

Büyük harfler

Sembol	Birim	Tanımı
A_i	mm^2	İndisine göre dolu alan, delikli kesitlerde deliksiz alan kabul edilir
C	1	Türevden oluşan sabitler
D	$N.mm^2$	Eğilme rijitliği D = E.J
E	MPa	Elastiklik modülü, Çelik için 210 000 MPa
F	N	Kuvvet
F_B	N	Burkulma kuvveti
F_E	N	Euler kuvveti
F_i	N	Kritik burkulma kuvveti
F_{kr}	N	İndisi yönünde kritik kuvvet
F_{pl}	N	Plastikliği doğuran en küçük kuvvet
G	MPa	Kayma modülü, Çelik için 81 000 MPa
H	N	Çapraz veya kesme kuvveti
J	mm^4	Eylemsizlik momenti (eğilme)
J_T	mm^4	Eylemsizlik momenti (burulma, torsiyon)
J_ψ	mm^4	Eylemsizlik momenti (kabarma)
J_i	mm^4	İndisi eksenine göre eylemsizlik momenti
L	m	Boy
L_B	mm	Burkulma boyu
L_{kr}	mm	Kritik normal kuvvet için burkulma boyu
$M_{eğ}$	Nm	Eğilme momenti
M_{el}	Nm	Akma sınırına erişen eğilme momenti
M_i	Nm	İndisi eksenine göre veya indisine göre moment
M_{pl}	Nm	Plastikliği doğuran en küçük eğilme momenti
$M_{pl}(j)$	Nm	j je bağlı plastikliği doğuran en küçük eğilme momenti
M_q	Nm	Sabit yayılı yükten oluşan eğilme momenti
N	N	Normal kuvvet
N_{pl}	N	Plastikliği doğuran en küçük normal kuvvet
$N_{pl}(j)$	N	j je bağlı plastikliği doğuran en küçük normal kuvvet
R	mm	Radyus (yarı çap)
R(w)		Sehime bağlı Rayleigh oranı
U	Nm	Elastik potansiyel
V	N	Çapraz kuvvet, kesme kuvveti
V	Nm	Dış kuvvetlerin potansiyeli
V_i	N	İndisi yönünde çapraz kuvvet
$V_i(j)$	N	İndisi yönünde j ye bağlı çapraz kuvvet
V'_z	N	Kesma kuvvetinin 1. dereceden türevi
W_i	Nm	İndisi eksenine göre karşı koyma momenti (Elastiklik sınırı içinde)
$W_i(j)$	Nm	İndisi eksenine göre j ye bağlı karşı koyma momenti

Küçük harfler

Sembol	Birim	Tanımı
a_i	mm	İndisine göre mesafe
cos	1	Kosinus
cosh	1	Kosinushiperbol
d_i	mm	İndisine göre çap
dx	mm	Infinitesimal (sonsuz küçük) boy
e_0	mm	Ön sehim, çubuğun başlangıç sehimi

f_y	MPa	Akma mukavemeti sınırı
h	mm	yükseklik
i_i	mm	İndisine göre eylemsizlik radyusu
k_B	1/mm	Öz burkulma katsayısı
k_{el}	mm	Merkez noktası mesafesi
$k_{şe}$	1	Şekil geometrisi faktörü
k_j	1	Eylemsizlik momenti oranı
n	1	Sıranın son elemanı
n_a	1	Sistemde aralık (yataklar arası) sayısı
n_B	1	Burkulmada emniyet katsayısı
n_D	1	Dönüm noktaları arasında kalan parça sayısı
q	N/m	Sabit yayılı yük
q_i	N/m	İndisi yönünde sabit yayılı yük
sin	1	Sinüs
sinh	1	Sinüshiperbol
w	mm	Sehim
w'	m	Sehimin 1. dereceden türevi
w''	m	Sehimin 2. dereceden türevi
w'''	m	Sehimin 3. dereceden türevi
w''''	m	Sehimin 4. dereceden türevi
w(0)	m	x= 0 noktasındaki sehim
w'(0)	m	1. Ableitung der Durchbiegung in 0-Stellung
w(i)	m	i yerinde sehim
w'(L)	m	1. Ableitung der Durchbiegung in L-Stellung
w(x)	m	Durchbiegung in x-Stellung
w_0	mm	Başlangıçta oluşan ön sehim (ön deformasyon)
w0(x)	m	Durchbiegung von Normalkraft in x-Stellung
w0,max	m	max. Durchbiegung von Normalkraft
w_i	mm	İndisi yönünde sehim
w_p	mm	Sabit yayılı yükden oluşan sehim
$w_u(x)$	m	Verlängerung in u-Richtung und in x-Stellung
x	m	Länge in x-Richtung

Yunan harfleri, büyük

Sembol	Birim	Tanımı
Δi	1	Herhangi bir değerde fark
Φ	Nm(J)	Potansiyel enerji
$\Phi_{iç}$	Nm(J)	İç kuvvetlerin potansiyeli
$\Phi_{dı}$	Nm(J)	Dış kuvvetlerin potansiyeli

Yunan harfleri, küçük

Sembol	Birim	Tanımı
α	deg	Açı
α_F	1	İşletme kuvveti ile kritik en küçük kuvvetin oranı
α_{pl}	1	Plastiklik şekil faktörü
χ	1	Kavis
χ_B	1	Burkulmada azaltma faktörü
γ_M	1	Genel emniyet katsayısı γ_M =1,1
φ_B	1	Burkulmada yardımcı faktör
κ	1	Yardımcı faktör $\kappa = k_B.L$
λ	1	Narinlik

Sembol	Birim	Tanımı
λ_a	1	Temel narinlik
λ_B	1	Bağıntılı narinlik
λ_E	1	Akma narinliği
λ_{he}	1	Hesaplanan narinlik
μ	1	Büyültme faktörü
ν	1	Poisson sayısı (Çelik için 0,3)
π	1	Pi
σ_i	MPa	İndisine göre gerilme, indisine göre mukavemet değeri
ω	1	Omega katsayısı
ξ	1	Uzunluk oranı
ζ	mm	Mesafe

İndisler ve eklemeler

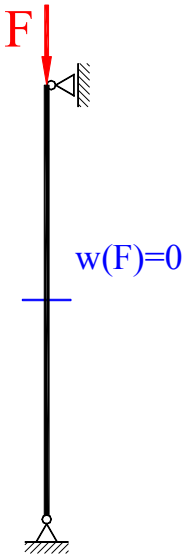
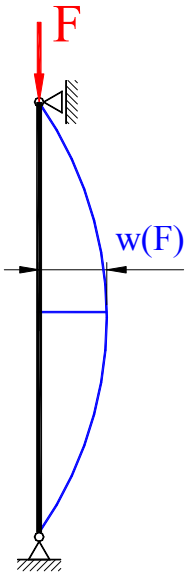
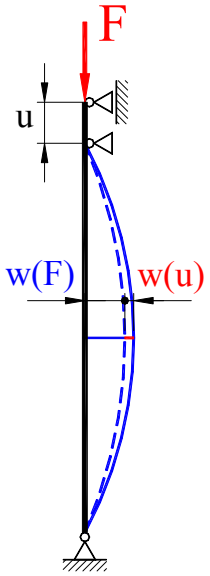
Sembol	Tanımlama
$-_1$	aralık numarası
$-_B$	burkulma
$-_b$	basma
$-_ç$	çubuk
$-_{bağ}$	bağlantı elemanı
$-_E$	Euler
$-_{EM}$	emniyetli
$-_{En}$	enerji
$-_{el}$	elastik
$-_{ger}$	gerekli
$-_{he}$	hesaplanan
$-_i$	yönü gösterir
$-_{in}$	indirgenmiş
$-_i(j)$	j ye bağlı veya j yerinde
$-_{iş}$	işletme değeri
$-_{Kö}$	köşegen
$-_{kr}$	kritik
$-_{max}$	maksimum
$-_{min}$	minimum
$-_{or}$	orantılı
$-_P$	profil
$-_p$	partikuler (özel)
$-_{pl}$	plastik
$-_q$	sabit yayılı yükten oluşan
$-_{Si}$	sistem
$-_{şe}$	şekil
$-_T$	Tetmajer
$-_{Top}$	Toplam
$-_V$	Vianello
$-_\omega$	omega
$-_x$	x yönünde veya x eksenine göre
$-_y$	y yönünde veya y eksenine göre
$-_z$	z yönünde veya z eksenine göre

STABİLİTE PROBLEMLERİ

Çelik konstrüksiyonda veya yapı statiğinde normal ***1.dereceli hesaplama kuralının*** (Denge ve deformasyon dikkate alınmadan) yanında şu yönlerde problemlerinde kontrolü yapılmalıdır.

- Stabilte 1, Burkulma,
- Stabilte 2, Buruşma,
- Stabilte 3, Yorulma,
- Bağlantılar (Civatalar, kaynaklar, perçinler, ...),
- Isı etkisi (Yangın, vb gibi).

Stabilite hesapları ***2.dereceli hesaplama kuralı*** ile yapılır. Bu dosyada yalnız ***"Stabilite 1, Burkulma"*** yı inceleyeceğiz. Stabilite problemi **"Burkulma"** ya girmeden önce statikteki hesaplama kurallarına kısa bir göz atalım.

1.dereceli hesaplama kuralı	2.dereceli hesaplama kuralı	3.dereceli hesaplama kuralı
		
Deforme olmayan sistemde denge. Deformasyon sistem ölçülerine göre dikkate alınmayacak kadar çok küçük (<< 1) Lineer, süper pozisyon olabilir. $M_I = 0$	Deforme olan sistemde denge. Deformasyon bir yönde sistem ölçülerine göre çok küçük, fakat dikkate alınır (<< 1) Lineer olmadığından, süper pozisyon olamaz $M_{II} = F \cdot w(F)$	Deforme olan sistemde denge. Deformasyonlar sistemde her yönden dikkate alınırsa. Lineer olmadığından, süper pozisyon olamaz $M_{III} = F \cdot [w(F) + w(u)]$

Şekil 1, Statikte hesaplama kuralları

0.1. Giriş

Çubuk konstrüksiyonlarda stabilite problemi, taşıyıcı konstrüksiyonun ana etkenlerin yanı sıra küçük yan etkenlerinin dikkate alınması ile 2.dereceli hesaplama kuralının uygulanmasıyla çözülür. Basit bir örnek olarak, oldukça büyük eksenel kuvvet etkisindeki bir çubuğun zayıf eksen yönünde sehim vermesini gösterebiliriz.

Burkulma problemlerini etkilerine göre şu gruplara ayırabiliriz:

- Eğilme burkulması: Oldukça büyük eksenel kuvvet etkisindeki bir çubuğun eksene dik sehim vermesi.

- Burulma burkulması: Oldukça büyük eksenel kuvvet ve burulma etkisindeki bir çubuğun burkulması.
- Devrilmek: Oldukça büyük eksenel kuvvet etkisindeki bir çubuğun bir tarafa devrilmesi.
- Eğilme ve burulma burkulması: Yukarıda görülen ilk iki durumun beraber etkisi.

Burada görülen bütün problem grupları aynı hesap yolu ile çözülür ve çözüm yolunun diğer durumlara, özellikle iki boyutlu etkilere uygulanmasını ileride göreceğiz.
Konstrüksiyolarda birçok yerde eni uzunlukları yanında oldukça küçük olan bir çok parçalar kullanılır. Kolonlar, kafes kirişler, binalardaki ve köprüler ile vinç yürüme yollarını taşıyan sütunlar, portal vinçlerin ayakları, kule vinçlerin sütunları vb elemanlar. Bu elemanlar mukavemet hesaplarında adları ile, stabilite hesaplarında ise "***çubuk***", "***kolon***" veya "***sütun***" olarak tanımlanırlar. Çubuklar eksenel basma kuvvetinin etkisinde deformasyona uğrarlar. Bu deformasyonların malzemenin mukavemet değerleri ile uzaktan yakından bir alakası yoktur, fakat yerine göre az veya çok zarara sebep olurlar. Bu bir stabilite problemidir. Stabilite hesaplarının ilk başında "***burkulma***" hesabı gelir (diğerleri: Bruşma, devrilme, vb). Memleketimizde bir çok literatürde burkulma, "***flambaj***" olarakta adlandırılır.

Her nekadar üretimde ideal konstrüksiyon, parçanın tümünün sabit toleranslarla ve malzemenin ideal homojen olamaması vb sebeplerden ötürü, yapılamamasına ayrıca kuvvet ekseni ile çubuk ekseninin tamamıyla uyuşması pratikte imkansız olmasına karşın, biz hesaplarda da problemi temelinden anlamak için önce çubuğu "***ideal burkulma çubuğu***" olarak kabul edeceğiz.

İdeal burkulma çubuğunun tanımı :

- İç gerilmesiz, Çubuk Kolon Sütun
- Prizmatik,
- Homojen ve doğrusal elastik malzeme,
- Kuvvet tam kesitin ağırlık merkezinden etkili,
- Parçanın kendi ağırlığı dikkate alınmayan

çubuk ideal burkulma çubuğudur.

Şimdi pratikte karşılaşacağımız problemlerin şekline göre konumuzu gruplayalım. Burada kullandığımız "konstrüksiyon" terimi tek çubuk, çok parçalı kolon ve çerçeveleri ifade eder.

0.2. Konstrüksiyon grupları

1. Grup: Yalnız eksenel yük etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği sabit konstrüksiyon,
2. Grup: Yalnız eksenel yük etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği ani değişen konstrüksiyon,
3. Grup: Yalnız eksenel yük etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği devamlı değişen konstrüksiyon,
4. Grup: Eksenel ve çapraz yayılı veya tek yük etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği sabit konstrüksiyon,
5. Grup: Eksenel ve çapraz yayılı veya tek yük etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği ani değişen konstrüksiyon,
6. Grup: Eksenel ve çapraz yayılı veya tek yük etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği devamlı değişen konstrüksiyon,
7. Grup: Eksenel yük ve bir eksenli veya iki eksenli eğilme momenti etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği sabit konstrüksiyon,
8. Grup: Eksenel yük ve bir eksenli veya iki eksenli eğilme momenti etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği ani değişen konstrüksiyon,
9. Grup: Eksenel yük ve bir eksenli veya iki eksenli eğilme momenti etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği devamlı değişen konstrüksiyon,
10. Grup: Eksenel yük ve burulma momenti etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği sabit konstrüksiyon,

9. Grup: Eksenel yük ve burulma momenti etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği devamlı değişen konstrüksiyon,

10. Grup: Eksenel yük, eğilme ve burulma momenti etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği sabit konstrüksiyon,

10. Grup: Eksenel yük, eğilme ve burulma momenti etkisinde kesit alanı ve eğilme rijitliği devamlı değişen konstrüksiyon,

Probleme basit olarak girelim ve önce ideal burkulmanın analizini yapalım.

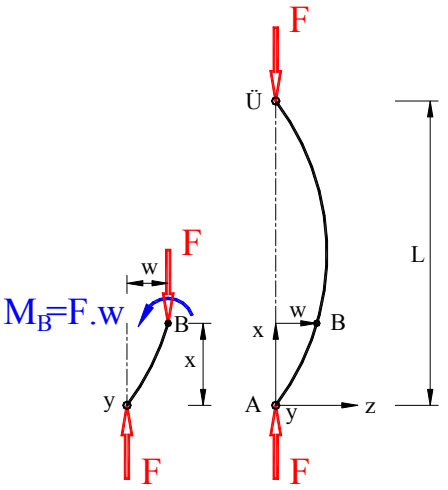
1. Burkulma teorisi

Yukarıda görülen bütün zorlamaların etkilerini görmek için sonsuz küçük bir kiriş parçasının analizini yapmak yeterlidir. İdeal kirişin kendi değerleri ile 2.dereceli hesaplama kuralına göre diferansiyel denkleminin sıralı analizi bizi Euler kuvvetine ve buna bağlı Euler hallerine getirir. Euler veya benzeri deformasyon halleri ideal kirişin 2.dereceli hesaplama kuralına göre elastiklik problemi olarak normal kuvvet altında analizi ile mukavemet sınırındaki Euler (kritik burkulma) kuvveti bulunur. İdeal plastik malzemeli çubuğun taşıyabileceği burkulma kuvvetinin "F_B" üstündeki kuvvetin etkilerinin analizi 2.dereceli hesaplama kuralı ile yapılır. Bu durumlar çubuğun hesaplanmasında bir etki göstermezler. Fakat çubuğun taşıma gücünde stabilitenin (burkulmanın) ne kadar etkisi olduğu görülür.

1.1. İdeal burkulma

1.1.1. Elastik eğri diferansiyel denkleminin basit olarak türemesi

Yukarıda tarifini yaptığımız ***"ideal burkulma çubuğunu"*** ele alıp analizini yapalım.



Şekil 2, İdeal çubuk

Kabuller ve tanımlamalar:

Eğilme rijitliği $D(x) = E.J = \text{sabit}$

Sehim (eğilme) $w(x)$

Kavis $\chi(x) \approx \dfrac{d^2w}{dx^2} = -w'' = \dfrac{M_{eğ}}{E \cdot J}$

Şekil 2 ile görüldüğü gibi, çubuk basma kluvveti etkisi altında w kadar eğilerek "***elastik eğri***" dediğimiz şekli alır. Elastik eğrinin B noktasını ele alırsak, sistemin dengede kalabilmesi için B noktasında F kuvvetinin oluşturacağı momente eşit bir karşı eğilme momenti olması gerekir. B noktasındaki denge şartının denklemini yazarsak: Eğilme momenti:

$$M(x) = F \cdot w$$

Diğer taraftan $M(x) = E \cdot J \cdot \chi$ olduğundan

"Elastik eğrininin diferansiyel denklemi" bulunur. .

$$F \cdot w = E \cdot J \cdot \chi$$

$$F \cdot w - E \cdot J \cdot \chi = 0$$

$$\boxed{F \cdot w + E \cdot J \cdot w'' = 0} \qquad \text{F 1}$$

Burada yaklaşımlı tanımlama olarak sehim eğrisini sinus eğrisi olarak kabul edelim:

$$\boxed{w = w_0 \cdot \sin(k_B \cdot x)} \qquad \text{F 2}$$

$$\boxed{w'' = -w_0 \cdot k_B^2 \cdot \sin(k_B \cdot x)} \qquad \text{F 3}$$

Aynı zamanda Şekil 2 ile görülen sistemin sınır (dayanak) koşullarını yazalım:
Çubuğun alt dayanağı "A" ve üst dayanağı "Ü" de moment sıfırdır.

$$M(0) = M(L) = 0$$

ve $$w'' = -\frac{M}{E \cdot J} = 0 \quad ; \quad w'' = 0$$ olur.

Buradanda şu kabuller doğar:

$x = 0$	çubuğun en alt sınırı "A" dayanağında	$w = 0$;	$w'' = 0$
$x = L$	çubuğun en üst sınırı "Ü" dayanağında	$w = 0$;	$w'' = 0$

Yukarıda formül F 2 ve F 3 ile verilmiş kabulleri F 1 formülüne yerleştirir:

$$\boxed{F \cdot w_0 \cdot \sin(k_B \cdot x) + E \cdot J \cdot \left[-w_0 \cdot k_B^2 \cdot \sin(k_B \cdot x)\right] = 0} \qquad \text{F 4}$$

ve eşitliğin iki tarafını ***$w_0 . \sin(k_B . x)$*** ile bölersek;

$$F = E \cdot J \cdot k_B^2$$

ve buradanda F kuvvetini kritşk kuvvet kabul edersek öz burkulma katsayısı k_B F 5 ile bulunur.

$$\boxed{k_B = \sqrt{\frac{F_{kr}}{E \cdot J}}} \qquad \text{F 5}$$

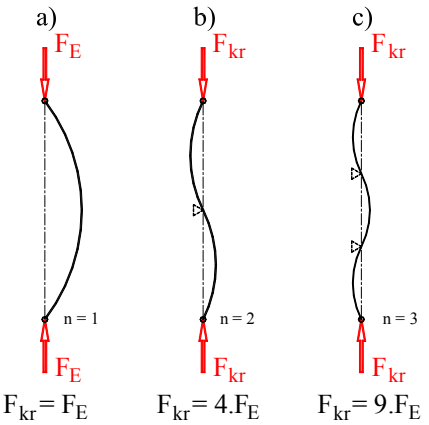
Öz burkulma katsayısı çubuğun değişmez denge konumuna dönebilmesi için gereken kuvvete erişme sınırını belirler. Şekil 3 ile eksenel kuvvet etkisindeki çubuğun klasik deformasyon şekilleri verilmiştir. Bu şekillerin analizini yaparsak, Sistemin sınır (dayanak) koşulları $w_{(L)} = 0$ ve $w''_{(L)} = 0$ olabilmesi için:

$$\sin(k_B \cdot L) = 0$$

olmalıdır. Böylece:

$$\boxed{k_B \cdot L = n_a \cdot \pi} \qquad \text{F 6}$$

Burada (n_a = 1, 2, 3, …..) kabul edilir ve k_B değeri F 5 formülünde yerleştirilirse:



Şekil 3, Deformasyon şekilleri

$$\sqrt{\frac{F_{kr}}{E \cdot J}} \cdot L = n_a \cdot \pi$$

Bu denklemin iki tarafının karesini alır ve Şekil 3, a) şıkkı için "***Basit burkulma***" n_a = 1 kabul eder ve denklemi "***kritik basma kuvveti***"ne göre eşitlersek "***Euler kuvveti***" ni buluruz.

Bu formül ilk defa 1757'de "***Euler***" tarafından bulunmuş olduğundan bu formüle "***Euler formülü***" de denilir.

İsviçreli matematikci ve fizikci ***Leonhard Euler*** 15. Nisan 1707 de Basel da doğdu, 18. Eylül 1783 de Sankt Petersburg da öldü.

$$\frac{F_{kr}}{E \cdot J} \cdot L_B^2 = n_a^2 \cdot \pi^2$$

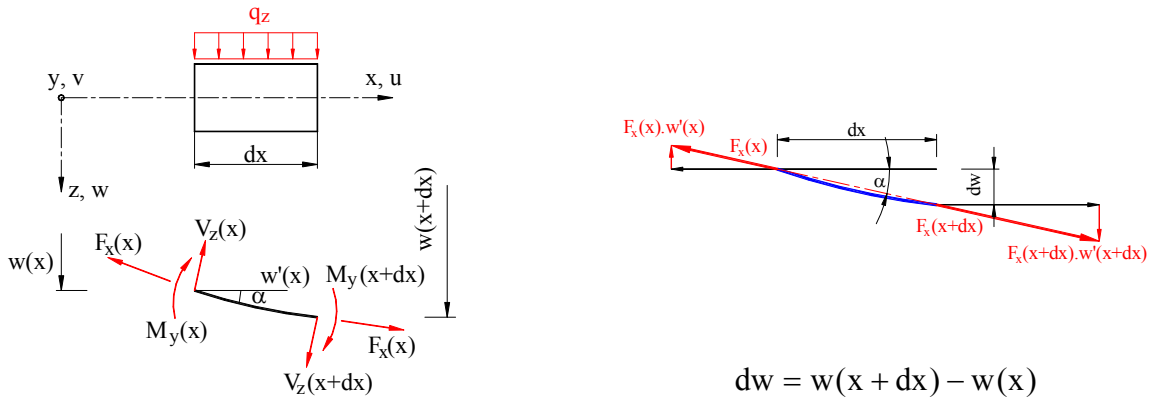
Burada n_a = 1 kabul edersek Euler formülünü buluruz. Bkz F 7.

Dikkat: Euler kuvvetiyle kritik burkulma kuvveti aynıdır.

$$\boxed{F_E = F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L_B^2}} \qquad \text{F 7}$$

1.1.2. Elastik eğri diferansiyel denkleminin 2.dereceli hesaplama kuralına göre türemesi

Daha önce gördüğümüz kirişin diferansiyel denkleminin 1.dereceli hesaplama kuralına göre türemesi ile kirişin diferansiyel denkleminin 2.dereceli hesaplama kuralına göre türemesi arasındaki fark, dengede etkisi olan deformasyonların dikkate alınarak sonsuz küçük (infinitesimal) kiriş parçasının analizidir.



$$dw = w(x+dx) - w(x)$$

Şekil 4, Sonsuz küçük (infinitesimal) kiriş parçası

Şekil 4 ile görülen "α" açısını çok küçük olduğundan açının doğrusal (lineer) bağıntılarını şu şekilde yazabiliriz:

$$\boxed{\tan\alpha \cong \sin\alpha \cong \frac{dw}{dx} = \alpha = w'} \qquad \text{F 8}$$

$$\boxed{\cos\alpha \cong 1} \qquad \text{F 9}$$

Burada çapraz kuvvet (kesme kuvveti) V için denge şartını yazalım:

$$\Sigma V_z = 0 = q_z \cdot dx + V_z(x+dx) - V_z(x) + F_x(x+dx)\cdot w'(x+dx) - F_x(x)\cdot w'(x)$$

Burada denklemin iki tarafının terimlerini dx e bölersek:

$$\frac{q_z \cdot dx}{dx} = q_z \qquad \frac{V_z(x+dx) - V_z(x)}{dx} = V_z' \qquad \frac{F_x(x+dx)\cdot w'(x+dx) - F_x(x)\cdot w'(x)}{dx} = (F_x \cdot w')'$$

Bu formüllerde işlemleri yaparsak şu formül bulunur:

$$0 = q_z + V_z' + (F_x \cdot w')'$$

Basit kirişin I. Kurala göre diferansiyel denkleminin türemesindeki

Kinematik bağıntı: $\frac{1}{R} = \chi = -w''$

Malzeme bağıntısı: $M_y = E \cdot J_y \cdot \chi \quad ; \quad M_y = -E \cdot J_y \cdot w''$

Moment çapraz kuvvet bağıntısı: $M_y' = V_z$

Çapraz kuvvet bağıntısı, E ve J sabit: $V_z = -E \cdot J_y \cdot w'''$

Bu bağıntıları F 9 formülüne yerleştirirsek kiriş için diferansiyel denklemi buluruz:

$$\boxed{E \cdot J_y \cdot w'''' - (F \cdot w')' = q_z} \qquad \text{F 10}$$

Burada normal kuvvet "F" yi sabit değer kabul edersek, 2. dereceden hesaplama kuralına göre denklemimiz şu şekli alır:

$$E \cdot J_y \cdot w'''' - F \cdot w'' = q_z \qquad \text{F 11}$$

Burada öz burkulma katsayısı formül F 5 ile bulunduğu gibi $k_B = \sqrt{F/(E \cdot J_y)}$ dir. Çubuğun normal kuvvet ile eğilme etkisindeyken diferansiyel denkleminin homojen çözüm formülünü yazalım:

$$w_u(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \cosh(k_B \cdot x) + C_4 \cdot \sinh(k_B \cdot x) \qquad \text{F 12}$$

Burada çapraz kuvvetler q_z ve q_0 sabit olduğundan x e bağlı (partikuler) özel hal sehim ve sehime bağlı moment formülü şu şekilde olur:

$$M_p(x) = F \cdot w_p(x) \qquad w_p(x) = \frac{M_p(x)}{F} \qquad M_p(x) = \frac{q_0 \cdot x^2}{2}$$

$$w_p(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot F} \qquad \text{F 13}$$

Normal kuvvet ve eğilmeden oluşan burkulmanın analizinde F 11 ile verilen eşitlikte normal kuvvetin ön işaretinin değiştirilmesi sistemde çekme kuvveti yerine basma kuvveti etkili olduğundan daha uygun olacaktır.

$$E \cdot J_y \cdot w'''' + F \cdot w'' = q_z \qquad \text{F 14}$$

Böylece formül F 12 ile verilen diferansiyel denklem şu şekli alır:

$$w_u(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \cos(k_B \cdot x) + C_4 \cdot \sin(k_B \cdot x) \qquad \text{F 15}$$

1.1.3. Euler halleri

Şekil 8-a) ile analizi yapılan çubuğun yanısıra ***Euler***in kendi adıyla anılan Şekil 6 ile görülen ***4-Euler hali***ninin analizini yapmıştır. Burada homojen çözüm şu şekilde sıralanır.

$$w_u(x) = 1 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot \cos(k_B \cdot x) + C_3 \cdot \sin(k_B \cdot x) \qquad \text{F 16}$$

Bu denklemde k ve C_1, C_2, C_3 olarak 4 bilinmeyen görülür. Şekil 6 ile görülen Euler 2, 3 ve 4 üncü hallerinde:

x =0 iken $\quad w(0) = 0 \quad ; \quad w'(0) = 0 \quad ; \quad C_2 = -1 \quad ; \quad C_1 = -\lambda \cdot C_3$

Eulerin 2 nci halinde ise (İki tarafı sıkı yataklanmış) çubuğun ucunda $w(L) = 0$ ve $w'(L) = 0$ dır. Bu değerleri F 16 formülüne yerleştirirsek şu formül bulunur.

$$2 - 2 \cdot \cos(\kappa) - \kappa \cdot \sin(\kappa) = 0 \qquad \text{F 17}$$

Buradanda sayısal çözüm olarak $k = 2 \cdot \pi / L$ dir. Böylece Euler burkulma kuvveti,

burkulma boyu $L_B = L/2$ için 2.Euler denklemi $\quad F_{E2} = \frac{4 \cdot E \cdot J \cdot \pi^2}{L^2}$ bulunur.

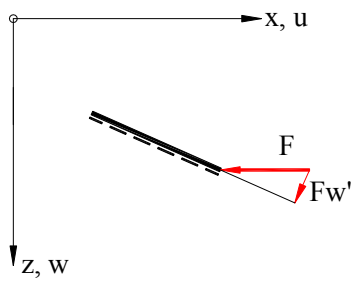
Eulerin 3 üncü halinde bir tarafı sıkı, diğer tarafı hareketli çubuğun sınır şartları w(L) = 0 ;

$M_y(L) = 0$ ile $\quad \kappa = k_B \cdot L = \tan(\kappa) \qquad$ F 18

ilişkisi ve sayısal çözüm olarak ***λ = 4,463/L*** değeri bulunur.

Burada burkulma boyu $L_B = \pi/\lambda = 0{,}6992$. L değeridir. Böylece Euler burkulma kuvveti, burkulma

boyu $L_B = \pi/\lambda \approx 0{,}7$. L için 3.Euler denklemi $\boxed{F_{E3} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{(0{,}7 \cdot L)^2}}$ bulunur.



Şekil 5, Serbest uçta sınır şartları

Eulerin 4 üncü halinde bir tarafı sıkı, diğer tarafı serbest çubuğun serbest ucunda $M_y(L) = 0$ yok olur. Burada sınır şartlarını bulmak oldukca zordur.

Şekil 5 ile gösterilmiş serbest uçtaki çapraz kuvvetin vektör değeri Fw' kadardır.

Bu değeri: $F = E \cdot J_y \cdot \lambda^2$

ve $V_z = -E \cdot J_y \cdot w'''$

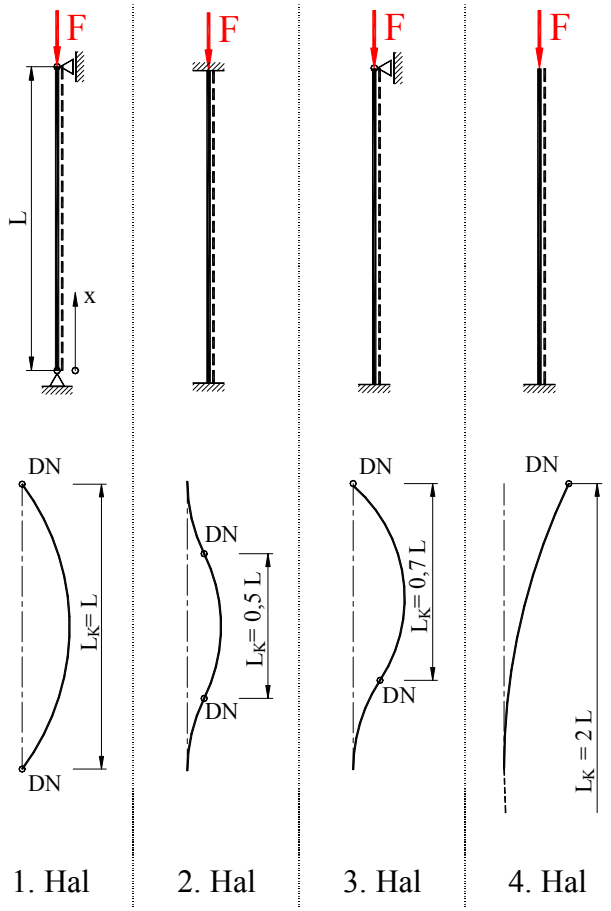
bağıtısı ve formül F 19 ile $k_B = \pi/2$ ve buradanda $L_B = 2.L$ bulunur.

$$\boxed{\cos(\kappa) - \sin(\kappa) + 1 = 0} \qquad \text{F 19}$$

Böylece Euler burkulma kuvveti, burkulma boyu $L_B = 2.L$ için:

4.Euler denklemi $\boxed{F_{E4} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{(2 \cdot L)^2}}$ bulunur.

1.1.3.1. Deneylerle Euler hallerinin şeklinin bulunması



Şekil 6, Euler in 4-Hali

Burkulmadaki en büyük problem "***Burkulma boyu***" L_B yi bulmaktır. Burkulma boyu ya hesaplanır veya tahmin edilerek kabul edilir. Yukarıda anlatılan genel çubuk teorisinin bir uygulaması olarak, sabit kesitli ve çeşitli dayanak koşulları için pratikte en çok karşılaşılan dört klasik duruma ait elastik eğriler Şekil 6 ile görülmektedir. Bu halleri ilk Euler analize ettiğinden, bunlara çoğu kez Euler halleri de denir. Burada homojen çözüm şu şekilde sıralanır.

Analitik olarak hesaplanan burkulma şekilleri (bkz. Şekil 6) C_1, C_2, C_3 ve k değerlerinin tespitinden sonra deneylerle çözümlerin doğruluğu ispat edilir. Şekil 6 ile verilen Eulerin 4 halinde görüldüğü gibi burkulma boyları L_B dönüm noktalarının arasındaki mesafedir. Deformasyon eğrisini sinüs eğrisi olarak kabul ettiğimizden, şu şartın geçerli olması lazımdır, $\kappa = k_B.L$.

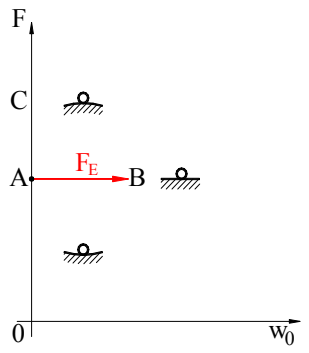
$$\boxed{w(L) = w_0 \cdot \sin(\kappa) = 0} \qquad \text{F 20}$$

Burada F 20 ile verilen şart "***Kendi değer problemi***" (Has kıymet problemi) yanında, beylik çözüm olan "$w_0 = 0$" içinde geçerlidir.

1.1.4. Burkulmada stabilite problemleri

Burkulmada stabilite problemleri genel olarak 2. derece hesaplama kuralında oluşur ve şunlardır.

1.1.4.1. Genişletilmiş denge problemi



Şekil 7, Denge durumu

Genişletilmiş denge problemi Şekil 7 ile gösterilmiştir:

$F < F_E$ 0A arası
İstikrarlı (Stabil) denge $w_0 = 0$
$F = F_E$ AB arası
Belirsiz denge $w_0 = 0$ belirsiz
$F > F_E$ AC arası
İstikrarsız denge $w_0 = 0$

"***Komplike burkulmalar***" da ($n_a > 1$), elastik eğrinin "$w_{(x)}$" dönüm noktalarında çubuğa dik dayanaklar yapmakta fayda vardır. Örneğin; Böyle dayanaklarla burkulmaya maruz çubuğun boyunu yarıya indirmek, kritik basma kuvvetini dört kat fazlalaştırmak demektir.

Önce ideal burkulma çubuğunu kesit kuvveti olmaksızın ($q_z = 0$) ele alalım. Homojen çözüm sınır şartları: $w(0) = w(c) = 0$ ve $M_y(0) = M_y(c) = 0$ ile formül F 21 eşitliğini kabul eder ve F 14 formülüne yerleştirirsek formül F 22 bulunur.

$$\boxed{w(x) = w_{max} \cdot \sin\left(\frac{n_a \cdot \pi \cdot x}{L}\right)} \qquad \text{F 21}$$

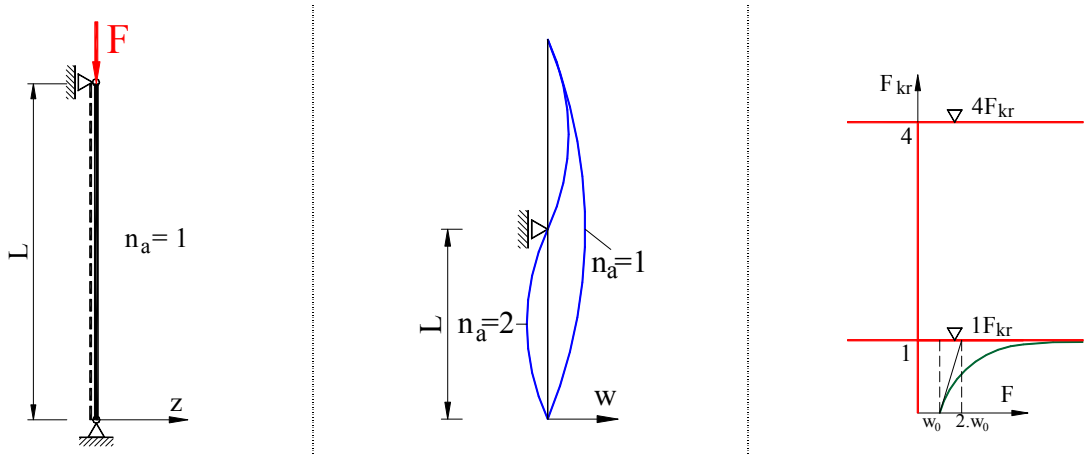
$$\boxed{\left(E \cdot J_y \cdot n_a^4 \cdot \frac{\pi^4}{L^4} + F_E \cdot n_a^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}\right) \cdot w_{max} \cdot \sin\left(\frac{n_a \cdot \pi \cdot x}{L}\right) = 0} \qquad \text{F 22}$$

F 22 formülünde yalnız formül F 23 ile görülen kısım sıfır olabilir. F 23 formülünün iki tarafını n^2 a böler ve F_E kuvvetine çözersek formül F 24 ile Euler kuvveti bulunur.

$$\boxed{E \cdot J_y \cdot n_a^4 \cdot \frac{\pi^4}{L^4} + F_E \cdot n_a^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2} = 0} \qquad \text{F 23}$$

Eşitliğin iki tarafını $n_a^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}$ bölersek: $E \cdot J_y \cdot n_a^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2} + F_E = 0$ bulunur. Buradan:

$$\boxed{F_E = n_a^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{L^2}} \qquad \text{F 24}$$



a) statik sistem b) Burkulma diyagramı c) Euler kuvveti

Şekil 8, Genişleme problemi

Çubuğu iki dönüm noktası arasında bir boy oloarak kabul edersek $n_a = 1$ olur ve formül F 25 bulunur. Bu formülü ilk Euler bulduğu için ***Euler formülü***de denilir. Buna aynı zamanda Eulerin 1 inci hali adı verilir. Şekil 8 b ile görülen çubukta ortaya hareketli yatak konularak problem yarı burkulma boyu ile çözülür.

$$F_{kr1} = F_{E1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{L_B^2} \qquad \text{F 25}$$

Formül F 25 ile görülen değere bazen ***"En küçük has değer"*** de denilir.

1.1.4.2. Elastiklik problemi

Malzemenin plastiklik durumu (malzemenin akması), elastiklik sınırı içinde çözülmek istenen burkulma problemini sınırlar.

Genelde lineer olmayan Moment/Kavis diyagramında, burkulma+sehim ile Kuvvet/Deformasyon diyagramları hesaplanır.

$$\sigma_{Kenar} = \frac{F_{iş}}{A} \pm \frac{M_{eğ}}{W_{eğ}} \qquad \text{F 26}$$

En kenardaki maksimum gerilmeyi şu şekilde yazabiliriz:

$$\sigma_{Kenar}^{max} = F_{iş} \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{e_0 + w_0}{W_{eğ}} \right) = f_y \qquad \text{F 27}$$

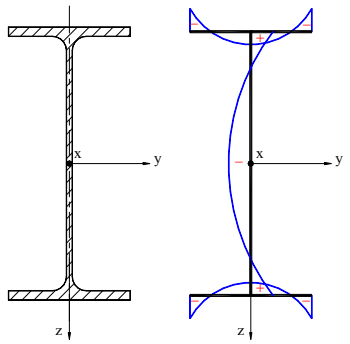
Geometrik boyutların oranından burkulmanın tipik büyüklüğü ***"narinlik"*** üretilmiştir. Narinliğin birimi yoktur ve sembolü eski Yunan alfabesinden λ (lamda) harfidir. Narinlik şu şekilde gösterilir:

$$\lambda = L_B / i_{min} \qquad \text{F 28}$$

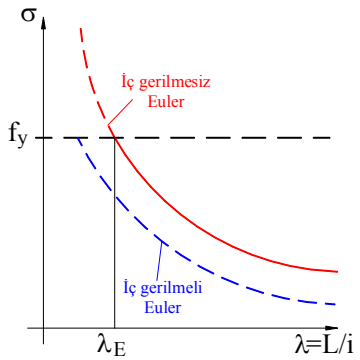
Burada kesitin eylemsizlik radyusunun (i_{min}) değerini narinlik formülünde yerleştirirsek şu bağıntıları buluruz:

$$i_{min} = \sqrt{J/A} \qquad \text{ve} \qquad \lambda = L_B / \sqrt{J/A}$$

İç gerilmeler



Şekil 9, I-Profilinde iç gerilmeler



Şekil 10, İç gerilmenin Euler e etkisi

Profiller haddeden geçirildikten sonra soğutma işlemlerinde iç gerilmeler oluşur. Önce soğuyan yüzeylerde basma gerilmesi oluşur. İç gerilmeler Moment/Kavis diyagramını ve dolayısıyla Kuvvet/Deformasyon diyagramını etkilerler. Bir I-Profilinde iç gerilmelerin etkisi Şekil 9 ile gösterilmiştir. Kuşakların dış taraflarında oluşan iç basma gerilimlerinden ötürü profilin x-yönünde basma kuvveti ile zorlanmasında ilk önce basmaya göre akma mukavemet değerine ulaşır.

Şekil 10 ile iç gerilimin Euler gerilimine etkisi gösterilmiştir. Burada şu bağıntılar geçerlidir:

Euler kuvveti $F_E = \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L_B^2}$

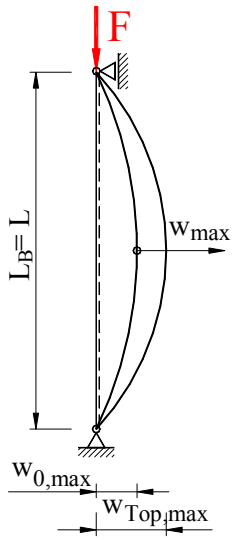
Narinlik λ nın tanımı $\lambda = \dfrac{L_B}{i}$

Eylemsizlik radyusu $i = \sqrt{\dfrac{J}{A}}$ $\quad i^2 = \dfrac{J}{A}$ $\quad A = \dfrac{J}{i^2}$

Temel narinlik λ_a nın değeri: $\sigma_E = \dfrac{F_E}{A} = \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{A \cdot L_B^2} = \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{J \cdot L_B^2 / i^2} = \dfrac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_a^2} = f_y$ bağıntısından bulunur, bkz F 29.

$$\boxed{\lambda_a = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}} \qquad \text{F 29}$$

Burkulmada genişleme probleminin karşıtı olarak herhangi bir ***burkulma hali 1*** e benzer çubuğun analizini yaparsak, şu diferansiyel formülü işlememiz gerekir:



Şekil 11, İdeal sarkaç çubuk

$$\boxed{E \cdot J_y \cdot w'''' + F_{iş} \cdot (w + w_0)'' = q_z} \qquad \text{F 30}$$

$$\boxed{w_0(x) = w_{0,max} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)} \qquad \text{F 31}$$

Şekil 11 ile görülen klasik kiriş çubuk için formül F 21, n_a=1 için benzer deformasyonu F 31 ile gösterip, formül F 30 u bu değerlerle çözersek şu formülü buluruz: $w_{max} = \dfrac{F_{iş} \cdot w_{0,max}}{F_{kr} - F_{iş}}$ burada kesirin pay ve paydası F_{kr} ile bölünür ve $F_{iş} / F_{kr} = \alpha_F \le 1$ kabul edilirse:

$$\boxed{w_{max} = \frac{F_{iş} \cdot w_{0,max}}{F_{kr} - F_{iş}} = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} \cdot w_{0\,max}} \qquad \text{F 32}$$

Lineer büyüyen normal kuvvette, burkulma sehimi w_{max} lineer büyümez. Burkulma sehimi normal kuvvet kritik normal kuvvete yaklaştığında $F \rightarrow F_{kr}$, sehimde sonsuza doğru büyür.

2.Derece hesaplama kuralına göre elastiklik problemi F 32 formülüne göre elastiklik teorisiyle alakası yoktur, çünkü burada mukavemet sınırları aşılmamaktadır. Bu sınır durumunun analizi için aşağıda görülen bağıntılar yardımcıdır (2.Derece hesaplama kuralına göre gerilmeler problemi).

Eylemsizlik radyusu $$\boxed{i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}} \qquad \text{F 33}$$

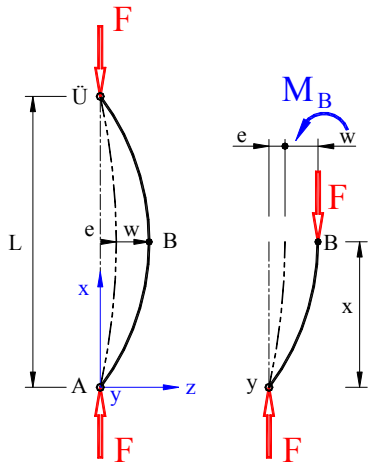
Temel narinlik $$\boxed{\lambda_a = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}} \qquad \text{F 34}$$

Narinlik $$\boxed{\lambda = \frac{L_B}{i_y}} \qquad \text{F 35}$$

Bağıntılı narinlik λ_B $$\boxed{\lambda_B = \frac{\lambda}{\lambda_a}} \qquad \text{F 36}$$

Merkez noktası mesafesi k_{el} $$\boxed{k_{el} = \frac{W_y}{A}} \qquad \text{F 37}$$

1.1.4.3. Çapraz kuvvet ve moment problemi



Şekil 12, Ön sehimin burkulmaya etkisi

Şekil 12 ile ön sehimli burkulmanın şematik hali görülmektedir. Burada ön sehim "e" nin değeri x in fonksiyonu olarak formül F 38 ile görüldüğü gibi kabul edilirse.

$$\boxed{e = e(x) = e_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)} \qquad \text{F 38}$$

Eğilme momenti:

$$M_B = F_{iş} \cdot (e + w)$$

Elastik eğrininin diferansiyel denklemi:

$$F_{iş} \cdot (e + w) + E \cdot J \cdot w'' = 0$$

Yaklaşımlı tanımlama olarak $w(x) = w_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$,

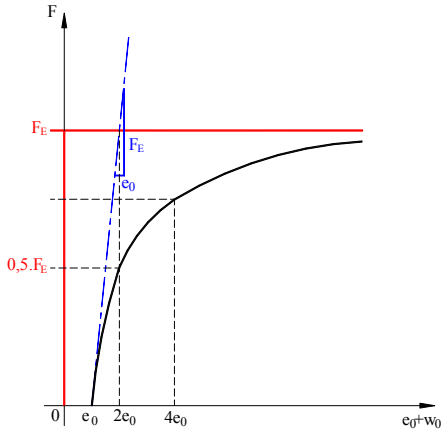
ile $e = e_0$ ve $w = w_0$ kabul edersek:

$w'' = w_0 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}$ buluruz. Buradan: $F_{iş} \cdot (e_0 + w_0) = E \cdot J \cdot w_0 \cdot \frac{\pi^2}{L^2} = w_0 \cdot F_{kr}$

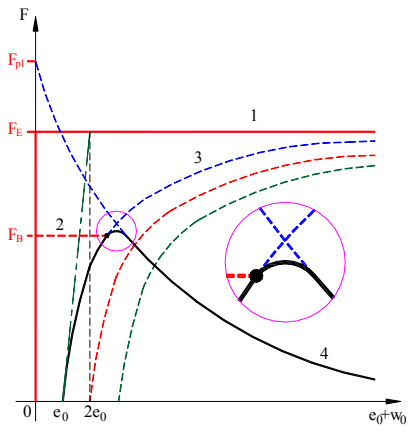
$w_0 \cdot \left(1 - \frac{F_{iş}}{F_{kr}}\right) = e_0 \cdot \frac{F_{iş}}{F_{kr}}$ olduğundan formül F 39 bulunur:

$$\boxed{e_0 + w_0 = \frac{e_0}{1 - F_{iş} / F_{kr}}} \qquad \text{F 39}$$

Formül F 39 ile görüldüğü gibi problemimiz daha karışık problem olmasından ziyade, normal stabilite problemidir. Eksenel kuvvet "$F_{iş}$" ile sehim "e_0+w_0" ın bağıntısı Şekil 13 ile açıkca görülmektedir. Sehim "$w_0 \rightarrow \infty$" Eksenel kuvvet "F_E" ye asimtot olarak yaklaşacaktır.



Şekil 13, Ön sehimin burkulmaya etkisi



Şekil 14, F-w Diyagramı

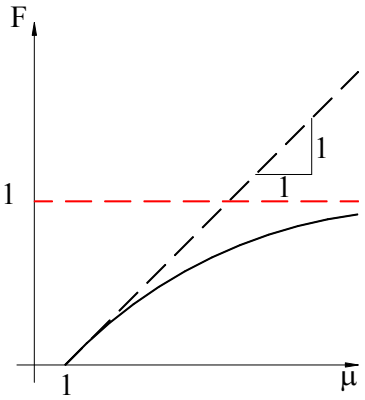
Şekil 14 ile görüldüğü gibi, ön sehim $e_0 = 0$ ise çubuk kusursuz ideal çubuk olarak kabul edilir. Ön sehim "e_0" ne kadar büyük olursa çubuk ideal çubuktan o kadar çok uzaklaşır.

İdeal çubuğa erişmek ($e_0 \rightarrow \infty$) pratikte imkansızdır ve pratiktede arzu edilen bir durumda değildir. Çünkü ideal çubukta, çubuğun ne zaman burkulacağı tam olarak hesaplanamaz.

"e_x" ve "w_x" ikiside sin eğrileridir ve biri birlerine (affin) benzerdir. Moment "$F_{iş}$.e" Herhangi bir "x" pozisyonunda şu sehimi verir:

$$w_1 = \alpha_F \cdot e$$

Böylece ek bir moment ortaya çıkar ($F_{iş} \cdot w_1$) bu momentte tekrardan ek bir moment oluşturur:



Şekil 15, Ön sehimin burkulmaya etkisi

$$w_2 = \alpha_F \cdot w_1 = \alpha_F^2 \cdot e$$

ve bu böyle devam eder. Böylece şu diziye ulaşırız:

$$e + w = e \cdot \left(1 + \alpha_F + \alpha_F^2 + \ldots\right) = \frac{e}{1 - \alpha_F}$$

Bu formülü F 39 formülüyle karşılaştırırsak, ***Kuvvetler oranı*** "α_F" yi buluruz. Deforme olmuş sistemde eğilme momenti $F_{iş} \cdot (e + w)$ normal moment $F_{iş} \cdot e$ nin çarpımıyla, deforme olmamış sistemde büyültme faktörü "μ" nün çarpımıyla bulunur.

$$\boxed{\alpha_F = F_{iş} / F_{kr}} \qquad \text{F 40}$$

Kuvvetler oranı "α_F" ile ***büyültme faktörü*** "μ" bulunur.

Büyültme faktörü "μ"

$$\boxed{\mu = \frac{e + w}{e} = \frac{1}{1 - \alpha_F}} \qquad \text{F 41}$$

Burkulmada çapraz kuvvet etkisi basit olarak Şekil 12 ile gösterilmiştir. Çapraz kuvveti sinüs formunda dağılmış kabul edersek, toplam etkileyen çapraz kuvvet "q" şu şekilde hesaplanır.

$$\boxed{q = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)} \qquad \text{F 42}$$

Bu kuvvet çubukta eğilme momentini oluşturur:

$$\boxed{M_q = \frac{L^2}{\pi^2} \cdot q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)} \qquad \text{F 43}$$

ve sehim

$$\boxed{w_q = \frac{q_0 \cdot L^4}{\pi^2 \cdot E \cdot J} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)} \qquad \text{F 44}$$

Formül F 44 ile formül F 38 karşılaştırıldığında burada "e_0" değerinin:

$$\boxed{e_0 = \frac{q_0 \cdot L^4}{\pi^2 \cdot E \cdot J}} \qquad \text{F 45}$$

olduğu görülür.
Eksenel kuvvet F nin ve çapraz kuvvet q nun oluşturduğu toplam sehimi paragraf "Ön sehimin burkulmaya etkisi" ne göre analog olarak düşünürsek formül F 46 bulunur:

$$\boxed{w = w_F + w_q = \frac{w_q}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}} \qquad \text{F 46}$$

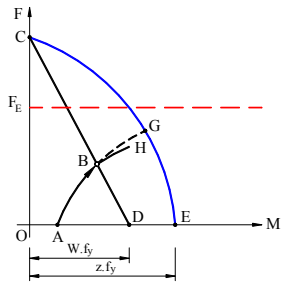
Eğilme momenti için:

$$M_{eğ} = M_q + M_F = M_q + F \cdot w = \left(\frac{q_0 \cdot L^2}{\pi^2} + \frac{q_0 \cdot L^4}{\pi^4 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{F}{1 - \frac{F}{F_E}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$$

$$M_{eğ} = \frac{q_0 \cdot L^2}{\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

$$\boxed{M_{eğ} = M_q \cdot \frac{1}{1-\alpha} = M_q \cdot \mu} \qquad \text{F 47}$$

Özet: Çapraz kuvvet ve burkulma etkisindeki bir çubukta çapraz kuvvetten oluşan sehim ve moment büyültme faktörü *"$\mu=1/(1-\alpha_F)$"* ile yaklaşık hesaplanır. Sinus şeklinde olmayan çapraz kuvvetlerde geçerli olmamakla beraber pratikte kabul edilen yaklaşık değer için kullanılır.

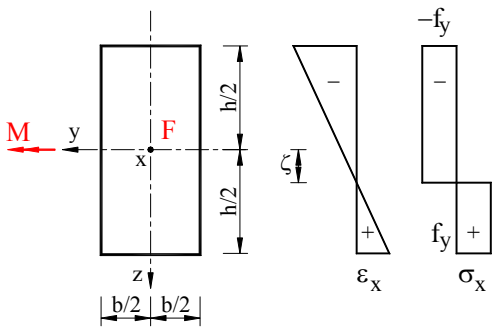


Şekil 16, F-M diyagramı

Şekil 16 ile görülen Kuvvet-Moment diyagramında:

CBD	Lineer	Akma başlama sınırı
CGE	Parabol	Kopma sınırı
ABG		Toplam moment $M_{eğ} = M_q \cdot \mu$
F_E	Lineer	Elastik-Plastik sınırı
W	Karşı koyma momenti	$W_{eğ} = b \cdot h^2 / 6$
z	faktor	$z = b \cdot h^2 / 4$
f_y	Malzemenin akma mukavemeti	

Örnek: Dikdörtgen kesitte elastik-plastik durumlar:



Şekil 17, Dikdörtgen kesitin analizi

Akmanın başlaması (Şekil 16, CBD):

$$f_y = \frac{F}{b \cdot h} + \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2} \quad \Rightarrow b \cdot h \cdot f_y - F - \frac{6 \cdot M}{h} = 0$$

Kopma (Şekil 16, CGE)

$$F = 2 \cdot \zeta \cdot b \cdot f_y$$

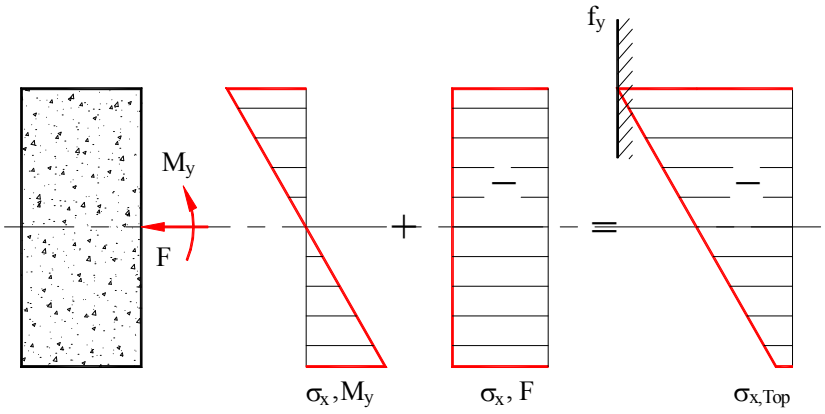
$$M = b \cdot \left(\frac{h}{2} - \zeta\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + \zeta\right) \cdot f_y \quad \text{bu iki formülden:}$$

$$\frac{b \cdot h^2}{4} \cdot f_y - \frac{F^2}{4 \cdot b \cdot f_y} - M = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Şekil 16 ile gösterilen Kuvvet-Moment diyagramında "q" yu A noktasına, "F" yi AB kavisine koyarsak, B iç gerilimsiz çubuğun akma mukavemetinin başlama noktasıdır. "F" kuvveti fazlalaştırıldığında eğrimiz normal BG eğrisinin altında BH eğrisi olarak devam eder.

Çubuğu etkileyen çapraz kuvvet bulunmasa bile burkulma olunca, çubuk kesitleri basınç kuvvetine dik kalmadığından, kesme kuvvetleri oluşur. Bu nedenle kesme kuvvetinide dikkate almak gerekir.

1.1.4.4. Gerilme problemi



Şekil 18, Normal gerilmenin etkileşimi

Normal kuvvet 2.Derece hesaplama kuralı elastiklik problemine göre dış lifde gerilme akma sınırına gelene kadar büyüyebilir, bkz. Şekil 18. Normal gerilmeler böylece şu bağıntıyı verir.

$$\boxed{\sigma_{EM} = f_y = \frac{F_{kr}}{A} + \frac{M_y}{W_y}} \qquad \text{F 48}$$

F 48 formülünün sağdaki iki tarafını f_y bölersek:

$$\boxed{\frac{F_{kr}}{A \cdot f_y} + \frac{M_y}{W_y \cdot f_y} = 1} \qquad \text{F 49}$$

Diğer taraftan şu bağıntıları biliyoruz:
$F_{pl} = A.f_y$, $\mathbf{n_F = F_{kr}/ F_{pl}}$, $M_y = F_{kr} . w_{max}$, $M_{pl} = F_{pl} . k_{el}$ ve $k_{el} = W_y/A \Rightarrow W_y = A . k_{el}$ olduğundan şu formül bulunur:

$$\boxed{1 = n_F + \frac{F_{kr}}{F_{pl}} \cdot \frac{w_{max}}{k_{el}}} \qquad \text{F 50}$$

$F_{pl}= \lambda_B^2 . F_{kr}$ ve F 32 $w_{max} = \dfrac{F \cdot w_{0,max}}{F_{kr} - F}$ yardımıyla şu bağıntı bulunur.

$$\boxed{1 = n_F + \frac{n}{1 - \lambda_B^2 \cdot n_F} \cdot \frac{w_{0,max}}{k_{el}}} \qquad \text{F 51}$$

Bu formül işlenerek şu formül bulunur:

$$\boxed{\lambda_B^2 \cdot n_F^2 - \left(\lambda_B^2 + 1 + \frac{w_{0,max}}{k_{el}}\right) \cdot n_F + 1 = 0} \qquad \text{F 52}$$

Parantez içindeki değeri burkulma yardımcı faktörü "φ_B" ile gösterir ve bu değeri F 52 formülüne yerleştirirsek formül F 53 elde edilir:

$$\lambda_B^2 + 1 + \frac{w_{0,max}}{k_{el}} = 2 \cdot \varphi_B$$

$$\boxed{\lambda_B^2 \cdot n_F^2 - 2 \cdot \varphi_B \cdot n_F + 1 = 0} \qquad \text{F 53}$$

Bu denklem ikinci dereceden denklemdir ve n^2 nin katsayısına iki tarafı bölersek n için klasik ikinci dereceden denklemi buluruz.

$$n_F^2 - \frac{2 \cdot \varphi_B}{\lambda_B^2} \cdot n_F + \frac{1}{\lambda_B^2} = 0$$

İkinci dereceden denklemin genel çözümünde değerleri yerleştirirsek:

$$n_{F1,2} = \frac{\varphi_B}{\lambda_B^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi_B}{\lambda_B^2}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_B^2}} \qquad n_{F1,2} = \frac{\varphi_B \pm \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}}{\lambda_B^2}$$

En küçük değer arandığından $n_F = \dfrac{\varphi_B - \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}}{\lambda_B^2}$ formülünü $\dfrac{\varphi_B + \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}}{\varphi_B + \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}}$ ile genişletelim:

$$n_F = \frac{\varphi_B^2 - \varphi_B^2 + \lambda_B^2}{\lambda_B^2 \cdot \varphi_B + \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}}$$

Böylece burkulmada azaltma faktörü veya burkulmada kavis faktörü formülünü buluruz.

$$n_F = \frac{F_{kr}}{F_{pl}} = \frac{1}{\varphi_B + \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}} = \chi_B \leq 1 \qquad \text{F 54}$$

Burada bulduğumuz burkulmada azaltma faktörü veya burkulmada kavis faktörü F 54, SIA 263, sayfa 28 de verilen formül (16) nın ve DIN 18800-2, sayfa 9 da verilen formül (4b) nin aynısıdır.

Hesapsal örnek:

S235 malzemeli HEA 200 profili L_B =3 m ile rakkas çubuk olarak konstrüksiyonu yapılacaktır. Bu çubuk ne kadar normal kuvvetle yüklenebilir?

Diğer bilinenler:	z-eksenine göre eylemsizlik momenti	$J_z = 13{,}4.10^6.mm^4$
	Profilin alanı	$A_P = 5380\ mm^2$
	Profil eni	$b_P = 200\ mm$
	Elastiklik modülü	$E = 210000\ MPa$
	Akma mukavemeti	$f_y = 235\ MPa$

Hesaplananlar:

Eylemsizlik radyusu	$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A_P}}$	$i_z = 49{,}9\ mm$
Karşıkoyma momenti	$W_z = \frac{2 \cdot J_z}{b_P}$	$W_z = 134.10^3.mm^3$
Temel narinlik	$\lambda_a = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$\lambda_a = 93{,}9$
Narinlik	$\lambda = \frac{L_B}{i_z}$	$\lambda = 60{,}1$
Bağıntılı narinlik	$\lambda_B = \frac{\lambda}{\lambda_a}$	$\lambda_B = 0{,}64$
Merkez noktası mesafesi	$k_{el} = \frac{W_z}{A_P}$	$k_{el} = 24{,}9\ mm$
Plastikliği doğuran Normal-Kuvveti	$F_{pl} = A_P \cdot f_y$	$F_{pl} = 1264{,}3\ kN$
		$\alpha_B = 0{,}49$
Max burkulma sehimi	$w_{0max} = k_{el} \cdot \alpha_B \cdot (\lambda_B - 0{,}2)$	$w_{0max} = 5{,}4\ mm$
Burkulmada yardımcı faktör φ_B	$\varphi_B = 0{,}5 \cdot \left[1 + \alpha_B \cdot (\lambda_B - 0{,}2) + \lambda_B^2\right]$	$\varphi_B = 0{,}81$
Burkulmada azaltma faktörü χ_B	$\chi_B = \frac{1}{\varphi_B + \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}}$	$\chi_B = 0{,}761$
Yüklenebilinen normal kuvvet	$F_B = \chi_B \cdot F_{pl}$	$F_B = 962{,}6\ kN$

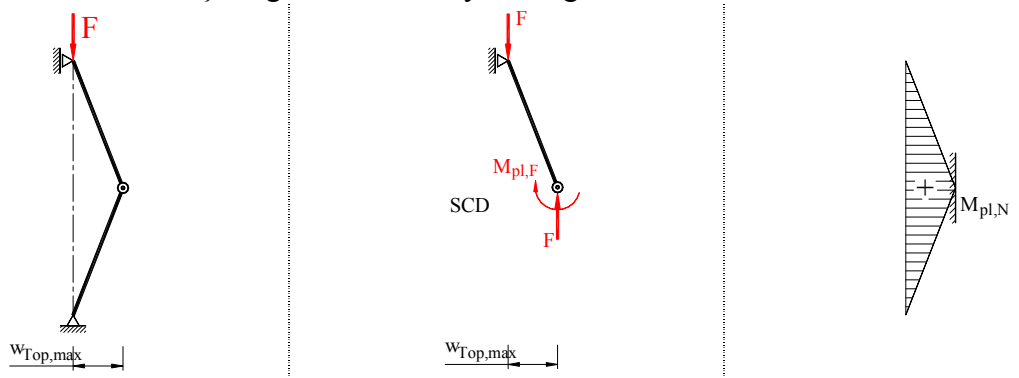
$$F_B = \chi_B \cdot F_{pl} \qquad \text{F 55}$$

Burada Yüklenebilinen normal kuvvet formülünün iki tarafını $\chi_B.F_{pl}$ ye bölersek DIN 18800-T2 de ki basit çubuk burkulma formülünü buluruz.

$$\frac{F_B}{\chi_B \cdot F_{pl}} \leq 1{,}0 \qquad \text{F 56}$$

1.1.4.5. Taşınan yük problemi

Plastiklik teorisi ile, ideal-plastik malzemede, kritik burkulma kuvveti aşıldığında çubuğun durumu açık şekilde analiz edilir. Çubuğun ortasında oynak bağlantı kabul edelim.



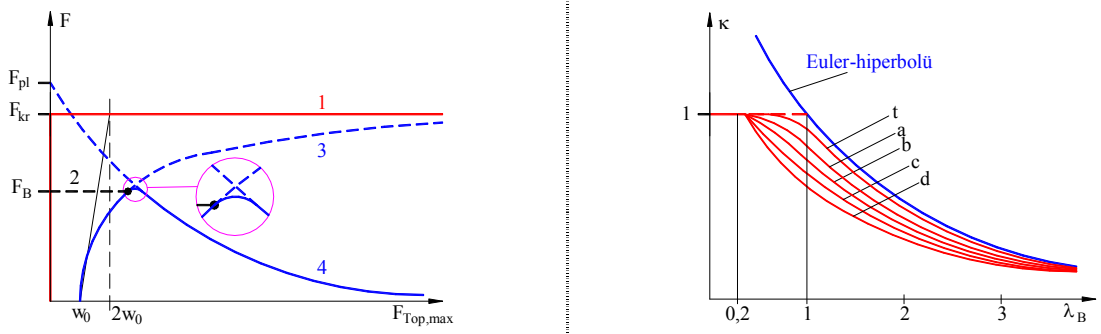
a) Mekanizma b) SCD c) Gerilim durumu

Şekil 19, Taşınan yük problemi

Şekil 19-a) ile görülen mekanizma, Şekil 19-c) ile görülen gerilme durumunu verir. Aynı zamanda F_u ya bağlı tam plastiklikdeki $M_{pl,Fu}$ ile M_{pl} momenti yaklaşık olarak aynı değerde kabul edilirse, formül F 57 ile görülen tam çözüm ortaya çıkar.

$$F_u = \frac{M_{pl,Fu}}{w_{top,max}} \cong \frac{M_{pl}}{w_{top,max}} \qquad \text{F 57}$$

Çeşitli hesapların sonuçlarını F-w-Diyagramı ile gösterirsek Şekil 20.a) ortaya çıkar.



a) F-w-Diyagramı b) Burkulma için azaltma faktörü

Şekil 20, Sonuçların özeti

Şekil 20.a) F-w-Diyagramının anlatımı:

1	Numaralı doğru: stabilite problemi	Teorik kritik kuvvet, n=1 Euler kuvveti veya en küçük burkulma kuvveti olarak tanımlanan F 25 formülü ile bulunur.	$F_{kr1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{L_B^2}$
2	Numaralı doğru: gerilme problemi	Hesaplanan toplam gerilme 1 den küçük olmalıdır ve formül F 49 ile bulunur.	$\frac{F}{F_{pl}} + \frac{M_y}{M_{ypl}} = 1{,}0$
3	Numaralı eğri: elastiklik problemi	formül F 32 ile bulunur.	$w_{max} = \frac{F_{iş} \cdot w_{0,max}}{F_{kr} - F_{iş}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot w_{0\,max}$
4	Numaralı eğri: taşınan yük problemi	formül F 57 ile bulunur.	$F_u = \frac{M_{pl,Fu}}{w_{top,max}} \cong \frac{M_{pl}}{w_{top,max}}$

Şekil 20.b) Çeşitli kesit ve zorlamalarda burkulma için azaltma faktörü diyagramının anlatımı:

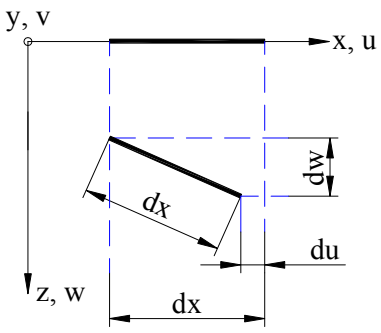
t eğrisi: Burulma ve eğilme etkisindeki çubukta azaltma faktörü değerleri

Tablo 1, Burkulma parametresi "α_B" (Çeşitli literatürden aktarma)

Burkulma parametresi "α_B"			
0,21	0,34	0,49	0,76
a	b	c	d
Sıcak şekillenmiş borular ve kaval profiller, Haddeli dar Profiller kuvvetli eksende	Haddeli profiller kuvvetli eksende, Haddeli dar Profiller zayıf eksende, Kaynaklı I-Profilleri kuvvetli eksende, Normal kaynaklı kutular her eksende	Haddeli I-Profilleri zayıf eksende ($t_f \leq 100$ mm), Kaynaklı I-Profilleri her eksende ($t_f \leq 40$ mm), Kalın kaynaklı kutular her eksende (a>0,5.t b/t<30), Soğuk şekillenmiş bütün borular, U-, L-, T- ve dolu kesitler ile çok parçalı kolonlar	Kalın flanşlı haddeli profiller ($t_f > 100$ mm), Kaynaklı I-Profilleri zayıf eksende ($t_f > 40$ mm)

1.1.5. Burkulmanın analizi

Formül F 32 ile görülen elastik burkulma ve formül F 57 ile görülen plastik burkulma durumunun oluşturduğu çubuk eksenine dik sehim w nin değerleri, formül F 14 ve Şekil 20 ile görülmektedir. Gerçek karakteristik durum normal kuvvet F ye bağlı deformasyon değeri u nun analiziyle görülür.



Şekil 21, Sonsuz küçük (infinitesimal) kiriş parçasının deformasyonu

Şekil 21 ile görülen sonsuz küçük kiriş parçasının deformasyon u formül F 58 ile gösterilen denklemin

$$du = \left(1 - \sqrt{1 - w'^2}\right) \cdot dx \qquad \text{F 58}$$

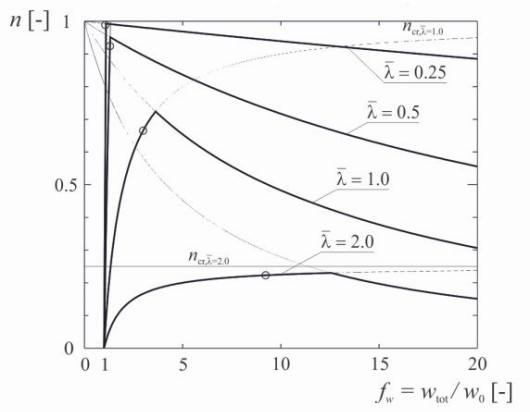
Taylor sırası ile integral formülü F 59 bulunur.

$$u = \int_0^L 0{,}5 \cdot w'^2 \cdot dx \qquad \text{F 59}$$

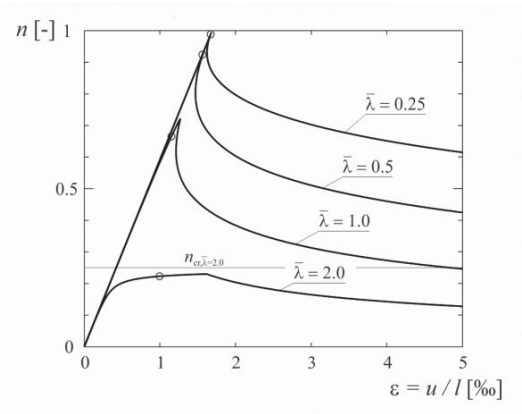
Böylece burkulmadan oluşan eksene dik sehim F-w Diyagramı ve boyuna deformasyon F-u Diyagramı bulunur. Bkz Şekil 22.

RHS-Profiliyle deney:

Ölçüleri h = 25.t olan RHS-Profilinin hesaplanan bağıntılı narinliğin λ_B = 0,25 ; 0,5 ; 1,0 ; 2,0 değerleri Şekil 22 ile gösterilmiştir.

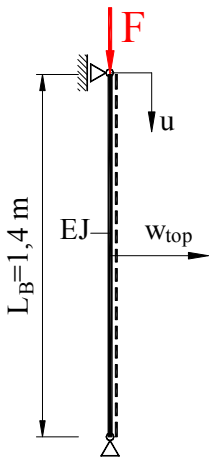


a) F-w ile



b) F-u ile

Şekil 22, Bağıntılı narinlik diyagramları



a) Statik sistem

b) Deney

Şekil 23, Burkulma deneyi

IPE 160 Profiliyle deney:

Teorik olarak Şekil 23 a) ile gösterilen burkulma çubuğu S235 malzemeli IPE 160 ın, ETHZ İnşaat bölümü (Höngerberg) HIF-labaratuarındaki 1600 kN luk üniversal pressle yapılan deneyin karşılaştırılması şu sonuçları vermiştir. Değerler SZS C5 konstrüksiyon tabloları kitabının 26 ıncı sayfasından alınmadır.

Eylemsizlik momenti	J_z = 683'000 mm^4
Profil alanı	A_P = 2010 mm^2
Elastik karşı koyma momenti	W_{elz} = 16'700 mm^3
Plastik karşı koyma momenti	W_{plz} = 26'100 mm^3
E-Modül	E =210 kN/mm^2
Akma gerilmesi (deneyle bulunan)	f_y = 290 Mpa

Burkulma boyu L_B=1,4 m ve çubukta özel olarak verilen ön sehim w_{0max} = 0,25 mm ile teorik hesabımızı yaparsak:

- Eylemsizlik radyusu $$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A_P}} = 18{,}4 \text{ mm}$$
- Temel narinlik $$\lambda_a = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 84{,}5$$
- Çubuğun narinliği $$\lambda = \frac{L_B}{i_z} = 75{,}9$$
- Bağıntılı narinlik $$\lambda_B = \frac{\lambda}{\lambda_a} = 0{,}90$$
- Merkez noktası mesafesi $$k_{el} = \frac{W_{el}}{A_P} = 8{,}3 \text{ mm}$$
- Euler burkulma kuvveti $$F_E = \frac{E \cdot J_z \cdot \pi^2}{L_B^2} = 722{,}2 \text{ kN}$$
- Plastikliği doğuran normal kuvvet $$F_{pl} = f_y \cdot A_P = 582{,}9 \text{ kN}$$
- Burkulma yardımcı faktörü "φ_B" $$\varphi_B = 0{,}5 \cdot \left[1 + \lambda_B^2 + \frac{w_{0max}}{k_{el}}\right] = 0{,}92$$
- Burkulma kuvveti $$F_B = F_{pl} \cdot \frac{1}{\varphi_B + \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}} = 525 \text{ kN}$$

Böylece formül F 32 ve formül F 57 ile sehim değeri ve F 59 ile eksenel deformasyon u hesaplanıp Şekil 24 ile diyagramlar gösterilir.

Örneğin burkulma kuvveti F_B için eksenel deformasyon u şu şekilde hesaplanır:

$\alpha = F_B / F_{kr}$ ve formül F 32 ile $$w_{max} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot w_{0max} = 0.666 = 0{,}7 \text{ mm}$$

Sıkışma süper pozisyonuyla eksenel deformasyon u:

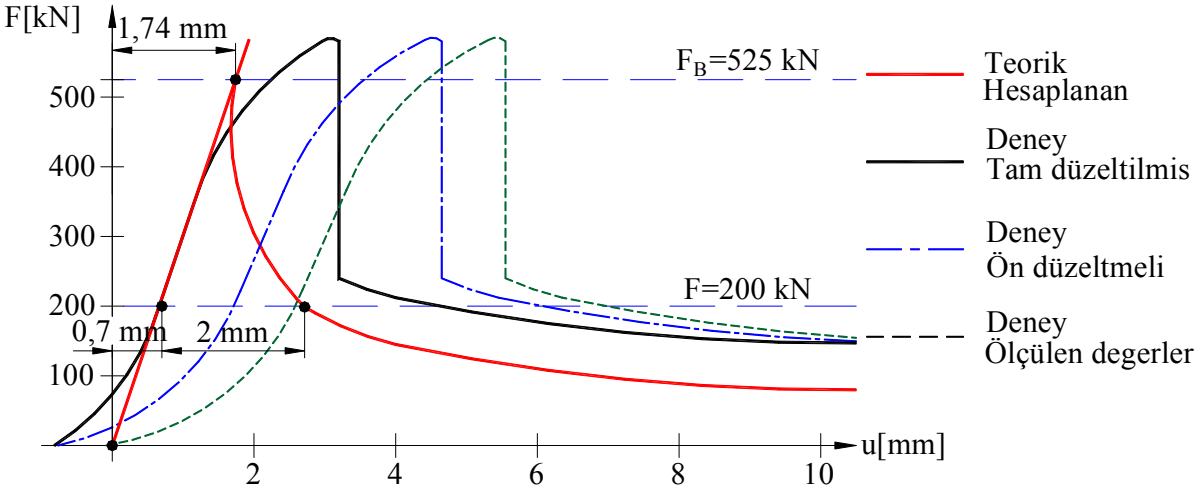
$$u = u_{el} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_B} w'^2 \cdot dx = \frac{F_B}{E \cdot A_P} \cdot L_B + \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot w_{0max} \right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{4 \cdot L_B} = 1{,}74 \text{ mm} + 0{,}001 \text{ mm} = 1{,}74 \text{ mm}$$

Basma kuvveti etkisindeki çubukta sehimden oluşan eksenel deformasyon (F 59) dikkate alınmayacak kadar küçüktür.

F_1 = 200 kN eksenel kuvvet etkisinde eksenel deformasyonu yaklaşık değer hesabıyla yaparsak şu değer bulunur:

$$u = u_{el} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_B} w'^2 \cdot dx = \frac{F_1}{E \cdot A_P} \cdot L_B + L_B - \sqrt{\left(\frac{L_B}{2}\right)^2 - w_{Top}^2} = 0{,}7 \text{ mm} + 2 \text{ mm}$$

Bu değerleri bir diyagramla gösterirsek Şekil 24 ile görülen tablo ortaya çıkar.



Şekil 24, Burkulma deneyinin karşılaştırmalı F-u-Diyagramı

Yukarıda paragraf "Deneylerle Euler hallerinin şekilerinin bulunması"nda belirtdiğimiz gibi burkulmadaki en büyük problem "***Burkulma boyu***" L_B yi bulmaktır.

Genelde 2.dereceli hesaplama kuralı ile Euler burkulma kuvveti ve maksşmum burkulma sehimini tam hesaplamak daima imkan dahilinde değildir. Böyle durumlarda burkulma hesabını yaklaşık olarak yapabilmek için çeşitli metotlar bulunmuştur. Bu metotların başında ***"Vianello metodu"*** gelir. Başta Vianello metodu olmak üzere ***Rayleigh-Ritz, Enerji ve Galerkin*** metotlarını sırasıyla görelim.

Dikkat unutma: Burkulma yalnız eksenel kuvvetten oluşan şekil değişimidir. Diğer etkenler sistemin kritik burkulma kuvvettini etkilemez fakat gerilmesini etkiler.

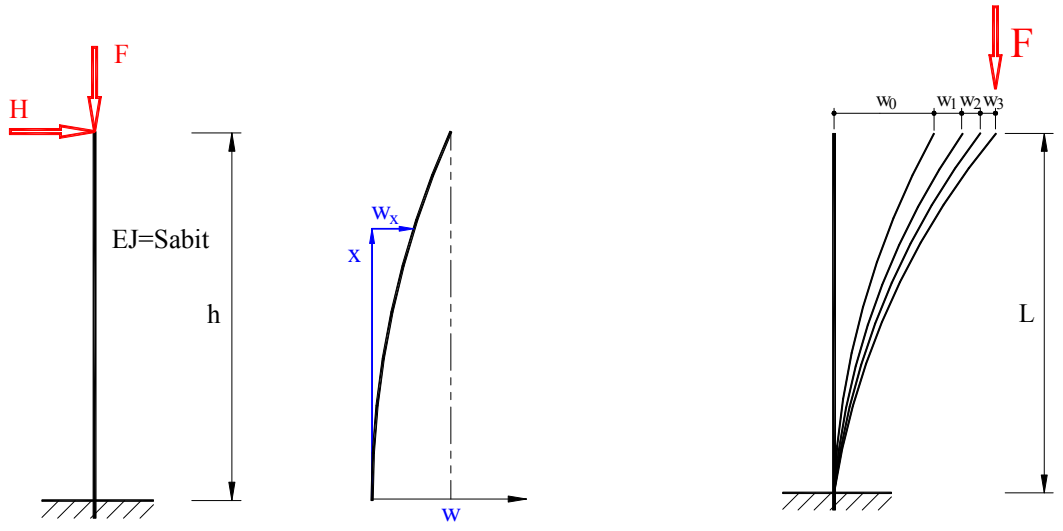
1.2. Vianello metodu

Vianello metodunda temel düşünce, Şekil 25 ile görülen çubuktaki toplam deformasyonu sıra oluşturarak hesaplamak ve hesaplanan sehimden burkulma kuvvetini bularak, işletme kuvvetiyle karşılaştırarak karar vermektir.Daha iyi anlayabilmek için ***Vianello*** metodunu özel bir örnekle beraber görelim.

1.2.1. Vianello metodunda çözüm yolu

Deformasyon şekli biliniyorsa deformasyon eğrisi belirlenir. Eğer deformasyon şekli bilinmiyorsa burkulma kuvveti şu yolla belirlenir:

1) 1.dereceli hesaplama kuralı ile çubuğun ön deformasyonu (sehimi) $w_0(x)$ hesaplanır. Hesap integral tablosuyla yapılabiliyorsa tablo ile, yapılamıyorsa integral hesabı doğrudan yapılır,
2) Sehim eğrisine tam veya oldukca benzer sınır şartlarını yerine getirecek bir eğri kabul edilir. Hesaplanmış $w_0(x)$ ve çubuğu etkileyen basma kuvvetiyle sehim $w_1(x)$ hesaplanır. Bu işlem pratikte kabul edilebilir sehimi bulana kadar tekrar edilir.
3) Birinci hesaplanan w_1 sehim formülünde $w_1 = w_0$ ve F / F_k kabulü ile F_{k1} değeri hesaplanır.
4) Kabul edilecek doğrulukta sonuç alınana kadar yukarıda görülen 2. ve 3. noktalardaki iterasyon işlemleri sonuç pratikte değişmez kabul edilene kadar yapılır.



Şekil 25, Vianello metodu

Şekil 25 ile görülen değerler:

w_0 = H dan oluşan ön sehim w_0, İş denklemiyle belirlenir, (1.dereceli hesaplama kuralına göre)
w_1 = F ve w_0 dan oluşan sehim, (2.dereceli hesaplama kuralına göre)
w_2 = F ve w_1 den oluşan sehim, (2.dereceli hesaplama kuralına göre)
w_3 = F ve w_2 den oluşan sehim, (2.dereceli hesaplama kuralına göre)
: .....
: .....
w_n = F ve w_{n-1} den oluşan sehim. (2.dereceli hesaplama kuralına göre)

Burada denge şartlarına göre çubuk ideal ve basma kuvvetlerinin değişik şekilde etkili oldukları kabul edilir.

Eğer w_0 ile w_1 benzer ise (örneğin: her ikiside ikinci dereceden parabol veya sinüs şeklinde ise) formül F 60 tam, eğer w_0 ile w_1 benzer değilse yaklaşık, değer olarak kabul edilir.

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_3}{w_2} = \cdots\cdots = \frac{w_n}{w_{n-1}} = \cdots\cdots = \frac{F_{iş}}{F_{kr}} = \alpha_F \qquad \text{F 60}$$

Böylece toplam sehim:

$$w_{top} = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots + w_n + \cdots$$

$$w_{top} = w_0 + \alpha_F \cdot w_0 + \alpha_F^2 \cdot w_0 + \alpha_F^3 \cdot w_0 + \cdots\cdots + \alpha_F^n \cdot w_0 + \cdots$$

$$w_{top} = w_0\left(1 + \alpha_F + \alpha_F^2 + \alpha_F^3 + \cdots\cdots + \alpha_F^n + \cdots\right) = w_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha_F}$$

Burada bulduğumuz toplam deformasyonu formül F 61 ile ifade edebiliriz.

$$\boxed{w_{top} = w_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha_F} = w_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{F_{iş}}{F_{kr}}} = \mu \cdot w_0} \qquad \text{F 61}$$

Burada kısaca büyültme faktörü μ nün matematiksel doğuşunu görelim:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_F^k = \lim/\ n \to \infty \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_F^k = \lim/\ n \to \infty \frac{1-\alpha_F^{n+1}}{1-\alpha_F} = \frac{1}{1-\alpha_F} \qquad \text{burada } \alpha_F \le 1 \text{ dir.}$$

Böylece büyültme faktörü "μ" ü buluruz.

$$\boxed{\mu = \frac{1}{1-\alpha_F} = \frac{1}{1-\frac{F_{iş}}{F_k}}} \qquad \text{F 62}$$

Yukarıda fomül F 62 ile verilen bağıntıya göre, eğer işletme kuvveti $F_{iş}$ kritik kuvvet F_k ya eşit olduğu zaman, toplam sehim $w_{top} \to \infty$ olacağından çubuk burkulur:

$$F_{iş} = F_B \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_F = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = \infty \quad \Rightarrow \quad w_{top} = \infty$$

Bu çubuğun burkulup kırılacağı demektir. Böylece kısaca burkulma şartını yazabiliriz:

$$\boxed{\alpha_F = 1} \qquad \text{F 63}$$

Kuvvetler oranı katsayısı: $\alpha_F = 1$ ise formül F 60 den

$$\boxed{\frac{w_1}{w_0} = \frac{F_{iş}}{F_{kr}} = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_0 \qquad F_{iş} = F_{kr}} \qquad \text{F 64}$$

1.2.2. Burkulma kuvveti "F_{kr}" nin hesabı

$$\boxed{w_1 = \frac{F_{iş}}{F_{kr}} \cdot w_0 \quad \Rightarrow \quad F_{kr} = \frac{w_0}{w_1} \cdot F_{iş}} \qquad \text{F 65}$$

Deformasyon yani kabul edilen ön deformasyon burkulma şekline benzer ise formül F 65 ile verilen bağıntı %100 geçerlidir. Eğer bu şart yoksa burkulma kuvveti yaklaşık olarak şu şekilde hesaplanır:

1. Sınır şartlarına oldukça benzer burkulma şeklinin kabulü (örneğin: yayılı yük "q" nun 1. derece teoriye göre sehim çizgisi $w_0(x)$ kabulü),
2. Herhangi bir eksenel kuvvet "$F_{iş}$" ile ön gerilimi $w_0(x)$ olan çubukdaki veya sistemdeki $w_1(x)$ deformasyonunun hesabı,
3. Seçilen her hangi bir yerdeki "x_i", $w_1(x_i)/\ w_0(x_i) = F_{iş}/F_{kr}$ oranı ile "F_{kr}" nin hesaplanması,
4. 2. ve 3. sırada verilmiş olan hesapları $w_0(x)$ yerine $w_1(x)$ ile F_{kr} pratik olarak değişmeyen sonuç

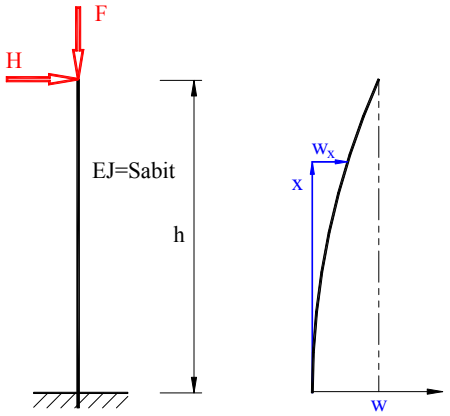
verene kadar tekrar ederek mümkün olduğu kadar doğru büyüklüğe ulaşmak.

Genelde deformasyonun maksimum olduğu yerde bu işlemler yapılırsa oldukca doğru sonuca çok çabuk ulaşılır.

$$w_{1max} = w_{0max} \quad \Rightarrow \quad F_{iş} = F_{kr}$$

Unutma: ***Vianello metodu ile bulunan kritik kuvvet F_{kr} gerçek kuvvetten büyük veya küçük olacaktır.***

1.2.3. Vianello metodu için örnek 1, Çapraz kuvvet ile



Şekil 26, Vianello metodu için örnek

Üst ucu serbest, alt ucu sabit bağlantılı bir çubuk Şekil 26 ile görüldüğü gibi zorlanıyor.

Bilinenler:

Eksenel kuvvet	$F_{iş}$= 700 kN
Çapraz kuvvet	H= 120 kN
Elastiklik modülü	E= 21.10^6 N/cm^2
Kesit eylemsizlik momenti	J = 28571 cm^4

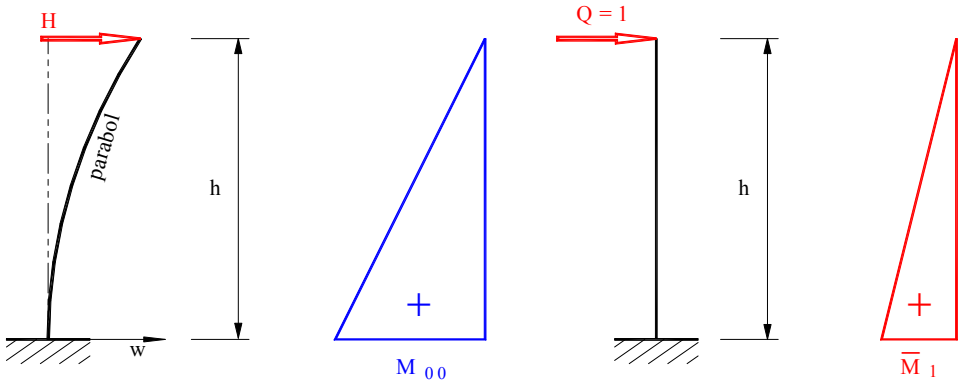
Gereken büyüklükleri hesaplayınız.

Eksenel kuvvetin oluşturduğu sehim çizgisini parabol olarak kabul edelim.

Çözüm:

Yukarıda anlattığımız ve Şekil 27 ile görüldüğü gibi toplam deformasyon;

$$w_{Top} = w_0+w_1+w_2+w_3+.... \quad \text{olarak hesaplanır.}$$



Şekil 27, Çubuk ucundaki sehim "w_0"

Ön sehim "w_0" ın hesaplanması:

Önce çapraz kuvvet "H" dan oluşan sehim "w_0" hesaplanır (bkz. Şekil 27).

$$\boxed{w_0 = \int_0^h M_{00} \cdot M_1 \cdot \frac{1}{E \cdot J} \cdot dx}$$

$$M_{00} = H \cdot h \qquad M_1 = h$$

İntegral tablosundan ↓ ← İntegral boyu "h" dır.

$$w_0 = \frac{1}{3} \cdot M_{00} \cdot M_1 \cdot \frac{h}{EJ} = \frac{1}{3} \cdot (H \cdot h) \cdot (h) \cdot \frac{h}{EJ} \qquad \boxed{w_0 = \frac{H \cdot h^3}{3 \cdot EJ}}$$

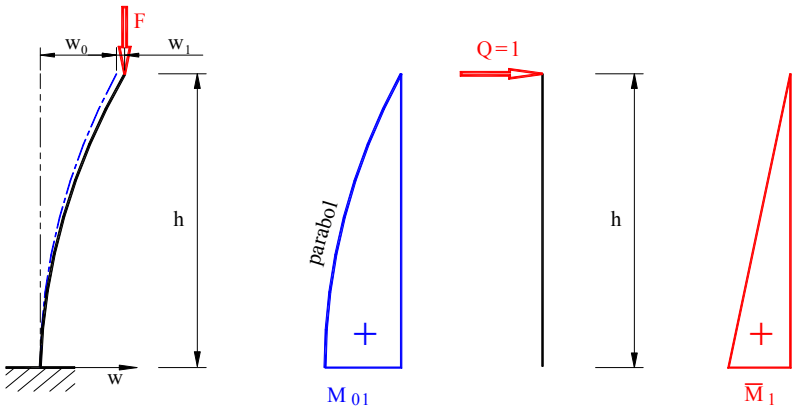
Burada bilinen değerleri yerleştirirsek:

$$w_0 = \frac{H \cdot h^3}{3 \cdot EJ} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 400^3}{3 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 28571} = 42{,}667\,\text{mm}$$

Çapraz kuvvet "H" dan oluşan sehim $w_0 = 42{,}667$ mm dir.

Kuvvet $F_{iş}$ ile w_o dan oluşan sehim "w_1" in hesaplanması:

Eğer sehimin eğriliği parabol olarak kabul edilirse formülü $w_1 = w_0 \cdot (x/h)^2$ olur.



Şekil 28, Çubuk ucundaki sehim "w_1"

$$\boxed{w_1 = \int_0^h M_{01} \cdot M_1 \cdot \frac{1}{E \cdot J} \cdot dx}$$

$$M_{01} = F \cdot w_0 \qquad M_1 = h$$

İntegral tablosundan yarım parabol ↓ ← İntegral boyu "h" dır.

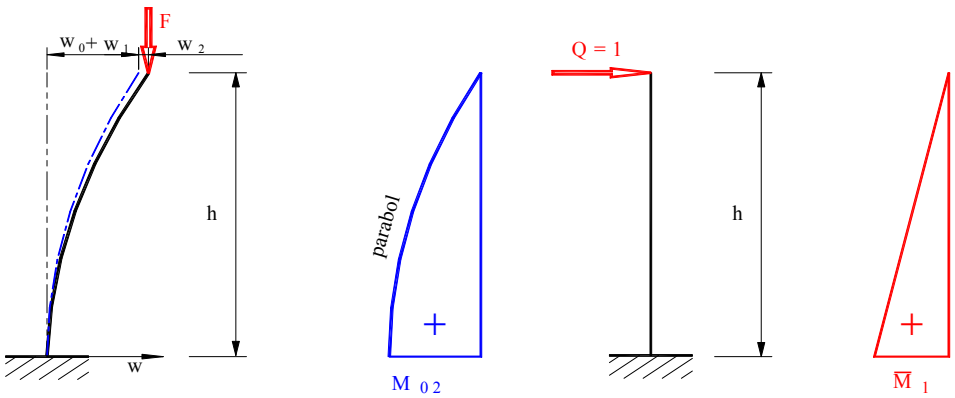
$$w_1 = \frac{5}{12} \cdot M_{01} \cdot M_1 \cdot \frac{h}{EJ} = \frac{5}{12} \cdot (F_{iş} \cdot w_0) \cdot (h) \cdot \frac{h}{EJ} \qquad \boxed{w_1 = \frac{5 \cdot F_{iş} \cdot w_0 \cdot h^2}{12 \cdot EJ}}$$

Burada bilinen değerleri yerleştirirsek:

$$w_1 = \frac{5 \cdot F_{iş} \cdot w_0 \cdot h^2}{12 \cdot EJ} = w_0 \cdot \frac{5 \cdot F_{iş} \cdot h^2}{12 \cdot EJ} = 42{,}667 \cdot \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 400^2}{3 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 28571} = 3{,}319\,\text{mm}$$

F 66

Kuvvet $F_{iş}$ ile w_1 den oluşan sehim "w_2" nin hesaplanması:



Şekil 29, Çubuk ucundaki sehim "w_2"

Burada bilinen değerleri yerleştirirsek:

$$w_2 = w_1 \cdot \frac{5 \cdot F_{iş} \cdot h^2}{12 \cdot EJ} = 3{,}319 \cdot \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 400^2}{3 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 28571} = 0{,}258\text{mm}$$

Kuvvet $F_{iş}$ ile w_2 den oluşan sehim "w_3" ün hesaplanması:

Aynı metotla yeni sehim w_3 hesaplanır ve bilinen değerleri yerleştirirsek:

$$w_3 = w_2 \cdot \frac{5 \cdot F_{iş} \cdot h^2}{12 \cdot EJ} = 40{,}258 \cdot \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 400^2}{3 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 28571} = 0{,}020\text{mm}$$

Toplam sehim "w_{top}" ın hesaplanması:

Buna devam edersek yukarıda belirtilen sıra oluşur. Görüldüğü gibi w_3 değeri 0,02 mm dir. Sehim w_4 ... w_n değeri çok daha küçük olacağından ($w_4 = w_3^2/w_2 = 0{,}0016$ mm yani 1,6 µm) pratikte dikkate alınmaz ve toplam sehim w_{Top} şu şekilde hesaplanır:

$$w_{Top} = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 42{,}667 + 3{,}319 + 0{,}258 + 0{,}020 \qquad \boxed{w_{Top} = 46{,}263\text{mm}}$$

Burada dikkat edersek ana sehim w_0 1.dereceli mukavemet hesabı ile diğer sehimler ise 2.dereceli hesaplama kuralı ile hesaplanırlar.

Toplam moment "M_{top}" ın hesaplanması:

Toplam sehim bilinince toplam momenti kolayca hesaplayabiliriz:

$$M_{top} = H \cdot h + F_{iş} \cdot w_{Top} = 120 \cdot 10^3 \cdot 4000 + 700 \cdot 10^3 \cdot 0{,}046263 \qquad \boxed{M_{top} = 512{,}38\ \text{kNm}}$$

1.2.3.1. Kritik burkulma kuvveti "F_{kr}"

Sehim **$w_1 = w_0$** ve kuvvetler **$F_{iş} = F_{kr}$** veya burkulma sınırı **$\alpha = w_1 / w_0 = 1$** kabul edersek formül F 66 ile kritik burkulma kuvveti **"F_{kr}"** nın değeri şu formülle hesaplanır:

$$w_1 = \frac{5 \cdot F_{iş} \cdot w_0 \cdot h^2}{12 \cdot EJ} \qquad w_0 = \frac{5 \cdot F_{kr} \cdot w_0 \cdot h^2}{12 \cdot EJ} \qquad \Rightarrow \qquad F_{krVi} = 2{,}4 \cdot \frac{E \cdot J}{h^2}$$

Değerleri yerleştirirsek E.J=60.MNm^2 h = 4 m

$$F_{krVi} = 2{,}4 \cdot \frac{60 \cdot 10^3}{4^2}$$

$$F_{krVi} = 9000 \cdot \text{kN}$$

Kritik (Euler) kuvveti hesaplayalım: $L_B = 2\ h = 8$ m

$$F_{krE} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L_B^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{(2h)^2}$$

Eğilme rijitliği E.J=60.MNm^2

$$F_{krE} = \frac{\pi^2 \cdot 60 \cdot 10^3}{8^2} \qquad F_{krE} = 9253 \cdot \text{kN}$$

"

Vianello ya göre çubuğun taşıyabileceği maksimum kuvvet 9000 kN dur. Çubuğu etkileyen normal kuvvet $F_{iş}$=700 kN olduğundan çubuk burkulmaya karşı $F_{krVi}/F_{iş}$ = 9000/700 = 12,86 kat emniyetlidir.

Burada görüldüğü gibi Vianello metodu ile bulunan kritik kuvvet gerçek Euler kritik burkulma kuvvetinden küçüktür.

1.2.3.2. Serbest uçdaki yaklaşık toplam sehim

Burada serbest uçtaki toplam sehimi pratikte kabul edilecek hata ile yaklaşık olarak hesaplamak istersek:

Kuvvetler oranı "α_F" $\alpha_F = \frac{F_{iş}}{F_E} = \frac{700}{9253} = 0{,}0757$

Büyültme faktörü "μ" $\mu = \frac{1}{1-\alpha_F} = \frac{1}{1-0{,}0757} = 1{,}0818$

Serbest uçtaki yaklaşık toplam sehim:

$w_{topy} = w_0 \cdot \mu = 42{,}667 \cdot 1{,}0818 = 46{,}16 \cdot mm$ $\underline{w_{topy} = 46{,}160 \cdot mm}$

Serbest uçtaki hesaplanan toplam sehim $\underline{w_{top} = 46{,}263 mm}$

Görüldüğü gibi aradaki fark 0,1 mm dir ve bu pratikte 46 mm ye kıyasla eşit kabul edilir.

1.2.3.3. Sabit uçdaki yaklaşık moment

Sabit uçtaki yaklaşık toplam moment "M_{topy}":

$M_{topy} = M_0 \cdot \mu = H \cdot h \cdot \mu = 120 \cdot 4 \cdot 1{,}0818 = 519{,}3 \cdot kNm$ $\underline{M_{topy} = 519{,}3 \cdot kNm}$

Sabit uçtaki hesaplanan moment $\underline{M_{top} = 512{,}38 \cdot kNm}$

Görüldüğü gibi momentler arasındaki fark ΔM = % 1,366 dır ve bu pratikte eşit kabul edilir.

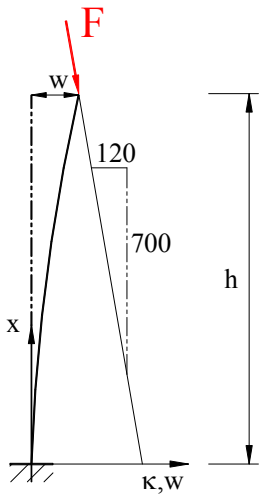
1.2.3.4. Yaklaşık burkulma boyu "L_{By}" nin hesabı

Burada bulduğumuz yeni oranlara göre değerler (kuvvetler) oranı "α_F":

$\alpha_F = \frac{w_1}{w_0} = \frac{3{,}319}{42{,}667} = 0{,}0778$ $\alpha_F = \frac{w_2}{w_1} = \frac{0{,}258}{3{,}319} = 0{,}0778$ $\alpha_F = \frac{w_3}{w_2} = \frac{0{,}020}{0{,}258} = 0{,}0778$

Euler formülünden yaklaşık burkulma boyu:

$L_{By} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\alpha_F \cdot E \cdot J}{F_{iş}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}0778 \cdot 60000}{700}} = 8{,}112 \cdot m$ $\underline{L_{By} = 8{,}112 \cdot m}$ $\underline{L_B = 8{,}0 \cdot m}$



Şekil 30, Tam çözüm krokisi

Problemin tam doğru çözümü diferensiyal formül F 67 in kullanılmasıyla yapılır.

$$M + E \cdot J \cdot w'' = 0 \qquad \text{F 67}$$

Burada $k_B^2 = \frac{F_{kr}}{E \cdot J}$ ile sabit uçtaki moment F 68 ile hesaplanır.

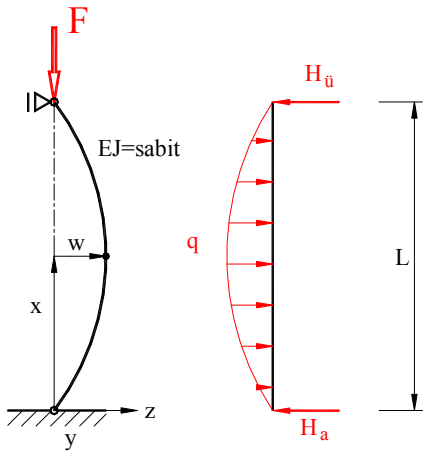
$$M_{Tt} = H \cdot h \cdot \frac{\tan(k_B \cdot h)}{k_B \cdot h} \qquad \text{F 68}$$

$M_{Tt} = 120 \cdot 4 \cdot \frac{0{,}4611}{0{,}4320}$ $\underline{M_{Tt} = 512{,}3 \cdot kNm}$

Çubuğun serbest ucundaki sehim:

$\underline{w_t = 46{,}11 \cdot mm}$

1.2.4. Vianello metodu için örnek 2, mit Querlast



Şekil 31, Yayılı çapraz yük

Örnek olarak eğilme rijitliği sabit olan bir kolonu ele alalım (Şekil 31). Burkulma kuvvetini hesaplamak için sehim çizgisi (w_0) tahmin edilir. Her hangi bir noktada w_0 dan oluşan sehim w_1 ile kritik eksenel kuvvet hesaplanır.

$$w_0 = w \cdot \frac{4 \cdot x \cdot (L - x)}{L^2} \quad \text{buradan:}$$

$$w_1 = \frac{F \cdot L \cdot w}{3 \cdot E \cdot J} \cdot x - \int_0^x \frac{4 \cdot w}{L^2} \cdot \frac{F}{E \cdot J} \cdot \xi \cdot (L - \xi) \cdot (x - \xi) \cdot d\xi$$

$$w_1 = \frac{F \cdot L \cdot w}{3 \cdot E \cdot J} \cdot x \left(1 - \frac{2 \cdot x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right)$$

Bu formüle x=L/2 değerini yerleştirir, $F_{kr} = F_{iş}$ ve $w_0(L/2) = w_1(L/2)$ olarak kabul edersek:

$$w_0 = \frac{F_{kr} \cdot L \cdot w_0}{3 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) \quad \text{buradanda} \quad \underline{\underline{F_{kr} \approx \frac{48}{5} \cdot \frac{E \cdot J}{L^2} = 9{,}6 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}}} \quad \text{bulunur.}$$

Genel olarak sehimler oranı;

$$\frac{w_0}{w_1} = \frac{12 \cdot E \cdot J \cdot (L - x)}{F \cdot (L^3 - 2 \cdot x^2 \cdot L + x^3)}$$

$x = 0$ max değeri verir: $F_{k\,max} = 12 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$

$x = L/2$ min değeri verir: $F_{k\,min} = 9{,}6 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$

Eğer ortalama büyüklükler kullanılırsa

$$w_{0or} = \int_0^L \frac{w_0 \cdot dx}{L} = \frac{2 \cdot w}{3} = w_{1or} = \int_0^L \frac{w_1 \cdot dx}{L} = \frac{F \cdot L^2 \cdot w}{3 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) \qquad \underline{\underline{w_{0or} = w_{1or} = \frac{F \cdot L^2 \cdot w}{15 \cdot E \cdot J}}}$$

Böylece kritik kuvvet $\underline{\underline{F_{kr} \approx 10 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}}}$ olarak bulunur.

Mohr analoğu $F.w_1/(E.J)$ ile kullanılırsa:

$$w_2 = \frac{8 \cdot F \cdot L^2 \cdot w}{75 \cdot E \cdot J} \cdot \left(3 \cdot \frac{x}{L} - 5 \cdot \frac{x^3}{L^3} + 3 \cdot \frac{x^5}{L^5} - \frac{x^6}{L^6} \right)$$

ve buradanda:

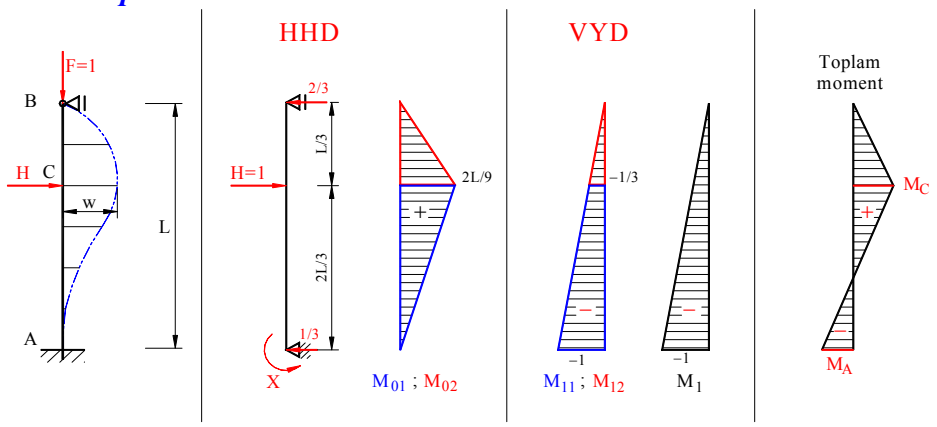
$$w_2(L/2) = w_1(L/2) \quad \rightarrow \quad F_{kr} \approx 9{,}836 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$$

$$w_2(0) = w_1(0) \quad \rightarrow \quad F_{kr} \approx 10 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$$

$$w_{2or} = w_{1or} \quad \rightarrow \quad F_{kr} \approx 9{,}882 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$$

Sonuç: ***Vianello metoduyla burkulma kuvveti ve diğer büyüklükler yapılan hesabın detayına göre oldukca doğru sonuçlara varılır. Genelde ilk hesap denemesinde pratikte kabul edilebilecek doğrulukta sonuçlara varılır.***

Tek çapraz yükle hesaplar:



Şekil 32, Tek çapraz yük etkisi

Şekil 32 ile görülen çubuk eksenel kuvvet F ve çapraz kuvvet H ile şekildeki ölçüler dahilinde zorlanmaktadır. Sistemdeki moment büyüklüklerini hesaplayınız. F = 1 ve H=1 kabul edip genel hesap yapınız. Burada burkulma için $M_{bk} = F \cdot w$ ve çapraz kuvvet içinde birinci dereceden bilinmeyenli basit kirişi ele alıp hesapları yaparız.

Birinci dereceden bilinmeyenli basit kiriş hesabı

a) δ_{10} deformasyon değerinin hesabı:

$$\boxed{\delta_{10} = \int_0^{2L/3} M_{01} \cdot M_{11} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot dx + \int_{2L/3}^{L} M_{02} \cdot M_{12} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot dx}$$

$$M_{01} = M_{02} = \frac{2L}{9} \quad ; \quad M_{11} = -\frac{1}{3} \quad ; \quad M_R = -\frac{1}{3} \quad ; \quad M_L = -1 \quad ; \quad M_1 = -1$$

1. Terim

İntegral tablosundan ↓ ← İntegral boyu "2L/3" dür.

$$\delta_{10T1} = \frac{1}{6} \cdot M_{01} \cdot (m_R + m_L) \cdot \frac{2 \cdot L}{3 \cdot EJ} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2L}{9} \cdot \left[(-1) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) \right] \cdot \frac{2 \cdot L}{3 \cdot EJ}$$

2. Terim

İntegral tablosundan ↓ ← İntegral boyu "L/3" dür.

$$\delta_{10T2} = \frac{1}{3} \cdot M_{01} \cdot M_{11} \cdot \frac{L}{3 \cdot EJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2L}{9} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{L}{3 \cdot EJ}$$

$$\delta_{10} = -\frac{2L}{9} \cdot \frac{2L}{3} \cdot \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{3}\right) - \frac{2L}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot EJ}$$

$$\boxed{\delta_{10} = -\frac{4 \cdot L^2}{81 \cdot EJ}}$$

b) δ_{11} deformasyon değerinin hesabı:

$$\boxed{\delta_{11} = \int_0^{L} M_1 \cdot \frac{M_1}{EJ} \cdot dx} \qquad M_1 = -1$$

İntegral tablosundan ↓ ← İntegral boyu "L" dir.

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot M_1 \cdot M_1 \cdot \frac{L}{EJ} = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{L}{EJ}$$

$$\boxed{\delta_{11} = \frac{L}{3 \cdot EJ}}$$

Uyumluluk Şartına göre $M_A = X_1$

$$\delta_1 = \delta_{10} + X \cdot \delta_1 = 0 \qquad M_A = X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

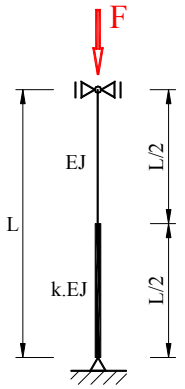
$$M_A = X = -\left(-\frac{4\cdot L^2}{81\cdot EJ}\right)\cdot\left(\frac{3\cdot EJ}{L}\right)$$

$$M_A = \frac{4\cdot L}{27} = 0{,}148\cdot L$$

$$M_C = \frac{2L}{9} - \frac{M_A}{3} = \frac{9\cdot 2\cdot L}{9\cdot 9} - \frac{4\cdot L}{3\cdot 27}$$

$$M_C = \frac{14\cdot L}{81} = 0{,}173\cdot L$$

1.2.4.1. Vianello metodu için örnek



Şekil 33, Kesit değişimi ani çubuk

Bilinenler:

Şekil 33 ile verilen sistem;

Eğilme rijitliği: EJ, k_j.EJ ($k_j \geq 1$)
(EJ momente bağlı değil)

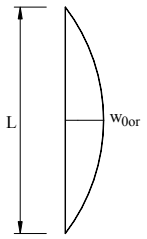
Eksenel kuvvet F

Arananlar:

Vianello metoduyla kritik eksenel kuvvet F_k .

Eğilme rijitliği aralıklarda sabit olduğundan hesaplar integral tablosuyla yapılabilir.

Çözüm:



Şekil 34, Kesit değişimi ani çubuk

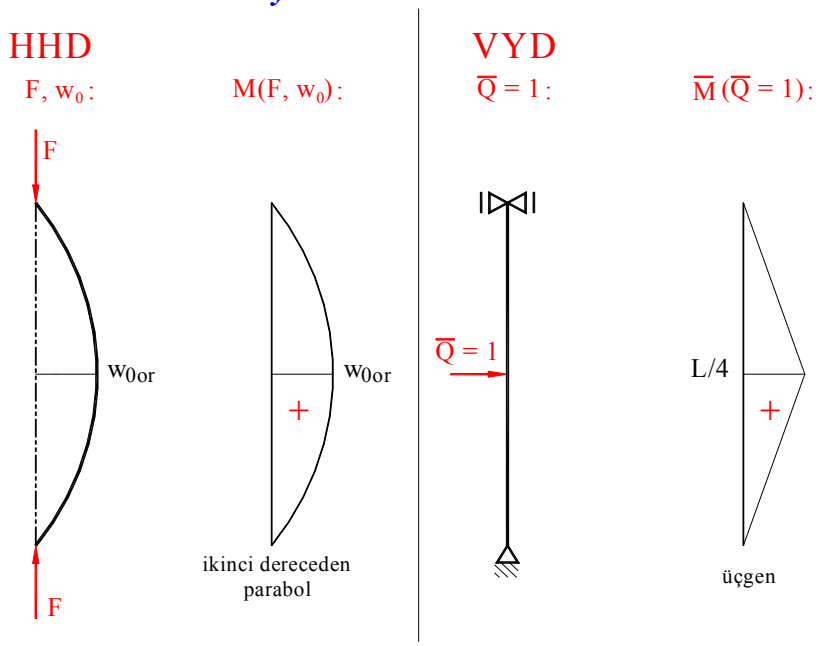
1) 1. kabul

a) Sehim eğrisinin kabulü:

Burada ***1. kabul*** olarak sehim eğrisini ikinci dereceden parabol olarak kabul edelim ve ön deformasyonu çubuk ortasındaki sehime göre yazalım:

$$w_0 = w_{0or}\cdot\left(-\frac{4}{L^2}\cdot x^2 + \frac{4}{L}\cdot x\right)$$

b) Gerçek hareket durumu ve virtüel yükleme durumları:



Şekil 35, Gerçek hareket durumu ve virtüel yükleme durumları

Şekil 35 ile verilen moment şekillerini alt ve üst taraf olarak iki kısımda hesaplamamız gerekir.

$$\boxed{w_{1or} = \int_0^{L/2} M_0 \cdot M_1 \cdot \frac{1}{E \cdot J} \cdot dx + \int_0^{L/2} M_0 \cdot M_1 \cdot \frac{1}{k \cdot E \cdot J} \cdot dx}$$

$$M_0 = F \cdot w_{0or} \qquad M_1 = L/4$$

1. Terim

İntegral tablosundan yarım parabol ↓ ←

İntegral boyu "L/2" dir.

$$w_{1or1} = \frac{5}{12} \cdot M_{02} \cdot M_1 \cdot \frac{L}{2 \cdot EJ} = \frac{5}{12} \cdot F \cdot w_{0or} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{2EJ}$$

$$\boxed{w_{1or1} = \frac{5 \cdot F \cdot w_{0or} \cdot L^2}{96 \cdot EJ}}$$

2. Terim

İntegral tablosundan yarım parabol ↓ ←

İntegral boyu "L/2" dir.

$$w_{1or21} = \frac{5}{12} \cdot M_{02} \cdot M_1 \cdot \frac{L}{2 \cdot k \cdot EJ} = \frac{5}{12} \cdot F \cdot w_{0or} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{2kEJ}$$

$$\boxed{w_{1or2} = \frac{5 \cdot F \cdot w_{0or} \cdot L^2}{96 \cdot k \cdot EJ}}$$

Toplam deformasyon: $w_{1or} = w_{1or1} + w_{1or2}$

$$w_{1or} = \frac{5 \cdot F \cdot w_{0or} \cdot L^2}{96 \cdot EJ} + \frac{5 \cdot F \cdot w_{0or} \cdot L^2}{96 \cdot k \cdot EJ} = \frac{5 \cdot F \cdot w_{0or} \cdot L^2}{96 \cdot EJ} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

c) Şu bağıntılarıda kabul edersek:

$F = F_{k1}$ için $w_{1or} = w_{0or}$ formülümüz: $w_{0or} = \frac{5 \cdot F_{kr1} \cdot w_{0or} \cdot L^2}{96 \cdot EJ} \cdot \frac{k+1}{k}$ buradan:

$$F_{kr1} = \frac{96}{5} \cdot \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19{,}2 \cdot \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{k}{k+1}$$ bulunur.

Bu sonucu "k=1" kabulü ile Euler (kritk) kuvvetiyle karşılaştırırsak:

$$F_{kr1} = 19{,}2 \cdot \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{1}{1+1} \qquad F_{kr1} = 9{,}6 \cdot \frac{EJ}{L^2}$$

$$\boxed{F_{k1} = 0{,}973 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EJ}{L^2}}$$

Euler (kritk) kuvveti

$$\boxed{F_E = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{L^2}}$$

Aradaki fark: $\Delta F = \frac{F_{k1} - F_E}{F_E} = \frac{0{,}973 - 1}{1}$

$$\boxed{\Delta F = -2{,}7\%}$$

Görüldüğü gibi hata pratikte kabul edilecek kadar küçük olmasına rağmen hiç bir zaman 1 olmayacağı için ($k \neq 1$) karar vermeden önce sonlu elemanlarlada hesabı yapmanızı öneririm.

2) 2. kabul

a) Sehim eğrisinin kabulü

2. kabul olarak sehim eğrisini sinüs eğrisi olarak kabul edelim ve ön deformasyonu çubuğun ortasındaki sehime göre yazalım:

$$w_0 = w_{0or} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$$

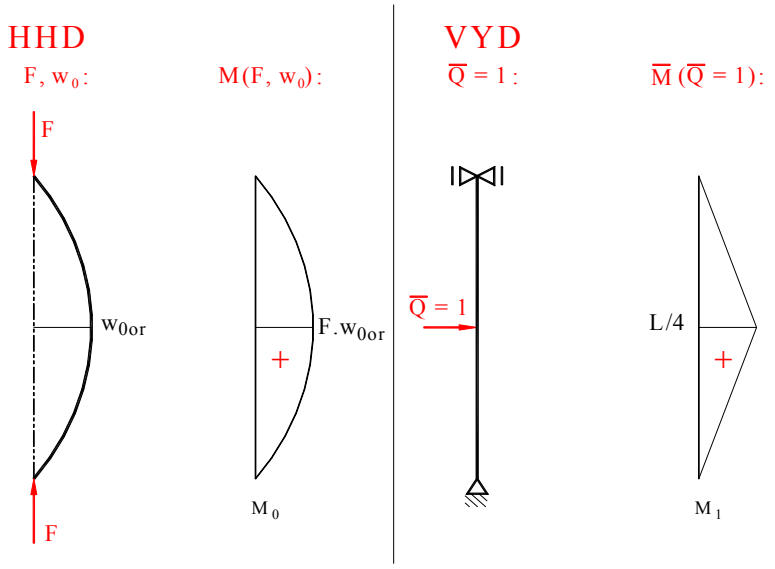
b) Gerçek hareket durumu ve virtüel yükleme durumları:

Şekil 36 ile verilen moment şekilleri sinüs şeklinde olduğundan integral tablosu ile hesaplamamız imkansızdır ve integral tarafımızdan doğrudan yapılmalıdır. Moment çubuğun iki yarısındada benzer olacağından (simetri) şu bağıntıyı yazarız:

$$\boxed{w_{1or} = \int_0^{L/2} M_0 \cdot M_1 \cdot \frac{1}{E \cdot J} \cdot dx + \int_0^{L/2} M_0 \cdot M_1 \cdot \frac{1}{k \cdot E \cdot J} \cdot dx}$$

$$M_0 = F_{iş} \cdot w_{0or} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \qquad M_1 = \frac{x}{2} \qquad 0 \le x \le L/2$$

$$w_{1or} = \int_0^{L/2} \frac{x}{2} \cdot \frac{F_{iş} \cdot w_{0or} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)}{E \cdot J} \cdot dx + \int_0^{L/2} \frac{x}{2} \cdot \frac{F_{iş} \cdot w_{0or} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)}{k \cdot E \cdot J} \cdot dx$$



Şekil 36, Gerçek hareket durumu ve virtüel yükleme durumları

$$w_{1or} = \frac{F \cdot w_{0or}}{2 \cdot E \cdot J}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2} - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)}{\frac{\pi}{L}}\right]_0^{L/2} + \frac{F \cdot w_{0or}}{2 \cdot k \cdot E \cdot J}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2} - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)}{\frac{\pi}{L}}\right]_0^{L/2}$$

$$w_{1or} = \frac{F \cdot w_{0or} \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J \cdot \pi^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

c) Şu bağıntılarıda kabul edersek:

$F_{iş} = F_{kr2}$ için $w_{1or} = w_{0or}$ formülümüz: $w_{0or} = \frac{F_{kr2} \cdot w_{0or} \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J \cdot \pi^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ buradan:

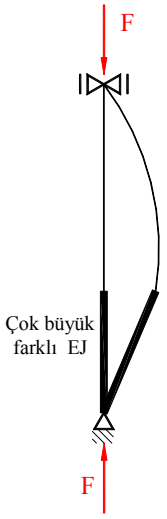
$$F_{k2} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot EJ}{L^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19{,}74 \cdot \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{k}{k+1}$$ bulunur.

Burada $2.\pi^2 = 19{,}74 \neq 19{,}2$ bulunur.

Burada görüldüğü gibi Vianello nun 2. Alternatifinde kabul edilen sehim eğrisinin şekli k=1 eğrisinin şekline benzerdir.
Eğilme rijitliği oranı k>>1 e yaklaştığında şekil benzerliği gittikce azalacaktır.
Burada ekstrem durum $k = \infty$ kabul edelim.

Vianello 1: $F_{kr1} = 19{,}2 \cdot \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19{,}2 \cdot \frac{EJ}{L^2}$ olur.

Vianello 2: $F_{kr2} = 19{,}74 \cdot \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19{,}74 \cdot \frac{EJ}{L^2}$ olur.



Şekil 37, Farklı "k" oranı

Bilgi sayar hesabı $F_{kr} = 16{,}4 \cdot \frac{EJ}{L^2}$

Hata yüzdesini hesaplarsak: $\frac{F_{kr1} - F_{kr}}{F_{kr}} = 17{,}1\%$ $\frac{F_{kr2} - F_{kr}}{F_{kr}} = 20{,}4\%$

1.2.4.2. Toplam deformasyon "w_{top}" ın hesabı

Bilinen kuvvet $F_{iş} < F_{kr}$, ön deformasyonlu "w_0", çapraz kuvvet etkisiz çubukta toplam deformasyonun "w_{top}" hesabı

$$w_{top} = \mu \cdot w_0 = w_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_{iş}}{F_{kr}}} \qquad \text{F 69}$$

Eğer kabul edilen ön deformasyonun burkulma şekli w_0 ile benzer ise formül F 69 ile verilen bağıntı %100 geçerlidir. Eğer bu şart yoksa burkulma kuvveti en doğru yaklaşık kuvvet olarak hesaplanmış olur. Burada "F_k" ya a) paragrafına göre hesaplanır, veya Euler kuvveti kritik kuvvet olarak alınır.

$$F_{kr} = F_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L_B^2} \qquad \text{F 70}$$

Burada L_B çubuğun burkulma boyudur.

1.2.4.3. Burkulma boyu "L_B" nin hesabı

Bilinen kuvvet $F<F_{kr}$, ön deformasyonlu "w_0", çapraz kuvvet etkisiz çubukta burkulma boyu "L_B" nin hesabı.

$$\frac{w_1}{w_0} = \alpha = \frac{F_{iş}}{F_{kr}} = \frac{F_{iş}}{F_E} = \frac{F_{iş} \cdot L_B^2}{\pi^2 \cdot E \cdot J}$$

$$L_B = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{F_{iş}}} \qquad \text{F 71}$$

1.2.4.4. Toplam deformasyon "w_{top}" ın ve toplam moment "M_{top}" ın hesabı

a) Bilinen kuvvet $F_{iş}<F_{kr}$, ön deformasyonsuz "w_0", yayılı çapraz kuvvet "q" etkili çubuktaki toplam deformasyon "w_{top}" ın ve toplam moment "M_{top}" ın hesabı

Burada çubuktaki toplam deformasyon "w_{top}":

Yayılı çapraz yük "q" dan oluşan ve 1. Dereceden hesaplanan moment $M_1(q)$ ve
Yayılı çapraz yük "q" dan oluşan (İş denklemi veya benzerinden) deformasyon $w_1(q)$ ise

F 72 ve F 73 formülleriyle hesaplanır:

$$w_{top} = \mu \cdot w_1 = w_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_{iş}}{F_{kr}}} \qquad \text{F 72}$$

$$M_{top} = M_1 + F \cdot w_{top} = M_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_{iş}}{F_{kr}}} = \mu \cdot M_1 \qquad \text{F 73}$$

Burada kabul edilen yayılı çapraz yük "q" dan oluşan deformasyon burkulma şekli ile benzer ise F 72 ile verilen toplam deformasyon formülü ve F 73 ile verilen toplam moment formülü %100 geçerlidir. Eğer bu şart yoksa hakikate en yaklaşık değerler hesaplanmış olur.

b) Bilinen kuvvet $F<F_k$, ön deformasyonlu "w_0", yayılı çapraz kuvvet "q" etkili çubuktaki toplam deformasyonun "w_{top}" ve toplam momentin "M_{top}" hesabı

Burada çubuktaki toplam deformasyon "w_{top}":

Yayılı çapraz yük "q" dan oluşan ve 1. Dereceden hesaplanan momnent $M_1 = M_1(q) + M_1(w_0)$

Yayılı çapraz yük "q" ve "w_0" dan oluşan deformasyon $w_1 = w_1(q) + w_1(w_0)$ ise

F 74 ve F 75 formülleriyle hesaplanır:

$$\boxed{w_{top} = w_0 + \mu \cdot w_1 = w_0 + w_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_{iş}}{F_{kr}}}} \qquad \text{F 74}$$

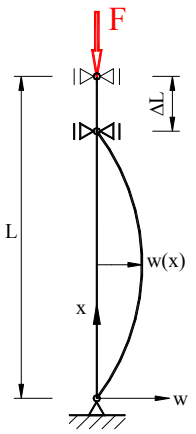
Toplam moment "M_{top}" ın hesabı için yayılı çapraz yük "q" dan oluşan ve 2. Dereceden hesaplanan momnent M_2 hasaplanır.

$$M_2 = F_{iş} \cdot [w_1(q) + w_1(w_0)] \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_{iş}}{F_{kr}}} = F_{iş} \cdot \mu \cdot w_1$$

$$\boxed{M_{top} = M_1 + M_2 = M_1 + F_{iş} \cdot w_{top} = M_1 + F_{iş} \cdot [w_1(q) + w_1(w_0)] \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_{iş}}{F_{kr}}} = M_1 + F_{iş} \cdot \mu \cdot w_1} \qquad \text{F 75}$$

Burada kabul edilen yayılı çapraz yük "q" dan oluşan deformasyon burkulma şekli ile benzer ise F 74 ile verilen toplam deformasyon formülü ve F 75 ile verilen toplam moment formülü %100 geçerlidir. Eğer bu şart yoksa hakikate en yaklaşık değerler hesaplanmış olur.

1.3. Rayleigh-Ritz metodu



Şekil 38, Rayleigh-Ritz metodu

Rayleigh-Ritz metodunu izah etmek için Şekil 38 ile görülen iki ucu oynak yataklanmış çubuğu tekrar ele alalım.

$$\boxed{\Phi_{top} = \Phi_{iç} + \Phi_{dı}} \qquad \text{F 76}$$

Φ_{top}	J	Toplam potansiyel enerji
$\Phi_{iç}$	J	İç kuvvetlerin potansiyeli
$\Phi_{dı}$	J	Dış kuvvetlerin potansiyeli

İç enerji potansiyeli "$\Phi_{iç}$"

$$\boxed{\Phi_{iç} = \frac{E \cdot J}{2} \cdot \int_0^L w''^2 \cdot dx} \qquad \text{F 77}$$

Dış kuvvetlerin potansiyeli "$\Phi_{dı}$"

$$\boxed{\Phi_{dı} = F_{iş} \cdot \Delta L = -\frac{F_{iş}}{2} \cdot \int_0^L w'^2 \cdot dx} \qquad \text{F 78}$$

Ön kabul olarak şu sehim bağıntısını kabul edersek:

$$w(x) = w_0 \cdot f(x)$$

Buna göre potansiyel enerji;

$$\boxed{\Phi(w) = \Phi_{iç}(w) + \Phi_{dı}(w) = \frac{E \cdot J}{2} \cdot \int_0^L w''^2 \cdot dx - \frac{F_{iş}}{2} \cdot \int_0^L w'^2 \cdot dx} \qquad \text{F 79}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi_{iç}}{dx} + \frac{d\Phi_{dı}}{dx} = 0$$

Burada terimleri yazarsak:

$$\frac{d\Phi_{iç}}{dx} = w_0 \cdot \int_0^L E \cdot J \cdot w''^2 \cdot dx \qquad \frac{d\Phi_{dı}}{dx} = -w_0 \cdot F \cdot \int_0^L w'^2 \cdot dx$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = w_0 \cdot \left(\int_0^L E \cdot J \cdot w''^2 \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2 \cdot dx \right) = 0$$

$$\int_0^L E \cdot J \cdot w''^2 \cdot dx - \int_0^L w'^2 \cdot dx = 0$$

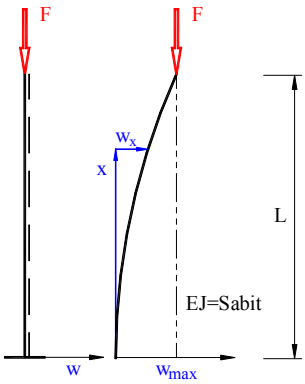
Buradan Rayleigh oranı "R(w)" bulunur. Rayleigh oranının minimum değeri kritik eksenel kuvveti, diğer deyimle Euler kuvvetini verir $R_{min} = F_{kr} = F_E$, bkz F 80.

$$\boxed{R_{(w)} = \frac{\int_0^L E \cdot J \cdot w''^2 \cdot dx}{\int_0^L w'^2 \cdot dx}} \qquad \text{F 80}$$

Burada unutulmaması gereken husus enerji metoduyla bulunan kritk kuvvet gerçek kritk kuvvetten daha büyüktür.

1.3.1. Rayleigh-Ritz metodu için örnek

Örnek 1: Şekil 39 ile verilmiş olan ideal çubuğun Rayleigh-Ritz metoduyla analizini yapınız.



Şekil 39, İdeal çubuk

İlk bakışta w deformasyonunu çeşitli şekilde ifade edeceğimiz görülmektedir. Örnek olarak deformasyonu

$$w(x) = w_{max} \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

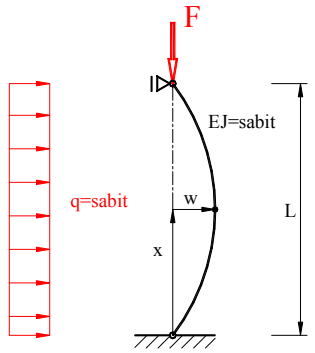
olarak kabul edersek, Rayleigh oranı:

$$R_{(w)} = \frac{E \cdot J \cdot 4 \cdot w_{max}^2 \cdot L \cdot L^4 \cdot 3}{L^4 \cdot w_{max}^2 \cdot L^3} = \frac{3 \cdot E \cdot J}{L^2}$$

Başka kabullerle Rayleigh oranı daha doğru sonuçlar verir.

Kabuller $\zeta = x/L$	Rayleigh oranı: integral 0 ile L arası	Sonuç
$w(\zeta) = 6 \cdot \zeta^2 - 4 \cdot \zeta^3 + \zeta^4$	$R_{(w)} = \frac{E \cdot J}{L^2} \cdot \frac{\int \left[12 \cdot (1-\zeta)^2\right]^2 \cdot d\zeta}{\int \left[4 \cdot \zeta \cdot \left(3 - 3\zeta + \zeta^2\right)\right]^2 \cdot d\zeta}$	$R_{(w)} = 2{,}8 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$
$w(\zeta) = 20 \cdot \zeta^2 - 10 \cdot \zeta^3 + \zeta^5$	$R_{(w)} = \frac{E \cdot J}{L^2} \cdot \frac{\int \left[20 \cdot \left(2 - 3\zeta + \zeta^3\right)\right]^2 \cdot d\zeta}{\int \left[5 \cdot \zeta \cdot \left(8 - 6\zeta + \zeta^3\right)\right]^2 \cdot d\zeta}$	$R_{(w)} = 2{,}69 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$
$w(\zeta) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)$	$R_{(w)} = \frac{E \cdot J}{L^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$	$R_{(w)} = 2{,}46 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$

Örnek 2: Şekil 40 ile verilmiş olan çapraz kuvvet etkili çubuğun Rayleigh-Ritz metoduyla analizini yapınız.



Şekil 40, Çapraz kuvvetli

$$w = a \cdot x \cdot (L - x)\ ; \quad w' = a \cdot (L - x) \quad ; \quad w'' = -2a$$

$$\Phi = \frac{EJ}{2} \cdot 4a^2 L - \frac{F}{2} a^2 \cdot \left(L^3 - 2L^3 + \frac{4}{3} L^3 \right) - q \cdot a \cdot \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 4 \cdot E \cdot J \cdot a \cdot L - F \cdot a \cdot L^3 / 3 - q \cdot L^3 / 6 = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{qL^2}{24EJ - 2FL^2} \qquad \rightarrow \qquad w = \frac{qL^2 x (L - x)}{24EJ - 2FL^2}$$

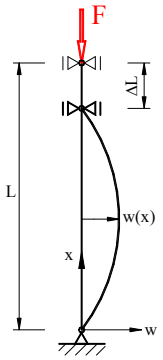
$$q \rightarrow 0 \quad : \quad F = \frac{12EJ}{L^2} = 1{,}216 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2}$$

$$F \rightarrow 0 \quad : \quad w(L/2) = \frac{q \cdot L^4}{96 \cdot E \cdot J} = 0{,}800 \cdot \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J}$$

Sonuç: Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi Ritz metoduyla yapılan hesapların bilinen gerçek hesaplarla karşılaştırılmalarında; kritik kuvvet gerçek kritik kuvvetten ≈ %20 fazla, sehimde gerçek sehimden ≈ %20 az olduğu görülmektedir.

Dikkat: Kabullerde geometrik sınır şartları ile gerçek geometri birbirine uymalıdır.

1.4. Enerji metodu



Şekil 41, Enerji metodu

Enerji metodunu önce özel bir örnekle açıklayalım sonra bunu genelleştirelim. Şekil 41 ile görülen iki ucu oynak yataklanmış çubuğu ele alıp enerji formülünü yazalım.

$$\boxed{\Phi_{top} = \Phi_{iç} + \Phi_{dı}} \qquad \text{F 81}$$

1.4.1. İç kuvvetlerin potansiyeli "$\Phi_{iç}$"

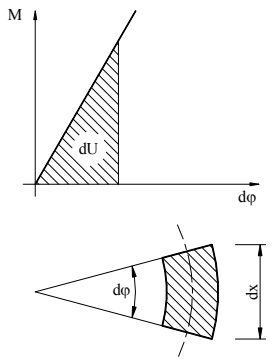
İç enerji potansiyeli (şekil değiştirme işi) formül F 82 ile hesaplanır.

$$\boxed{\Phi_{iç} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M^2}{E \cdot J} \cdot dx} \qquad \text{F 82}$$

Elastik potansiyel daima pozitifdir (+). Çünkü; iç kesitlerde bulunan şekil değiştirme enerjisine bağlı iş kapasitesi daima büyüyecektir. Elementar şekil değiştirme enerjisine bakacak olursak:

Şekil 42 ye göre elementar şekil değiştirme işi:

$$d\Phi_{iç} = 0{,}5 \cdot M \cdot d\varphi$$



Şekil 42, Şekil değiştirme

Şekil değiştirme işi: $\Phi_{iç} = \int_0^L d\Phi_{iç} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L M \cdot d\varphi$

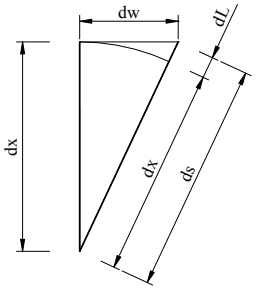
Diğer taraftan: $\frac{d\varphi}{dx} = \chi = \frac{M}{E \cdot J} \qquad \Phi_{iç} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M^2}{E \cdot J} \cdot dx$

$$\frac{M}{E \cdot J} = \chi \approx -w'' \qquad \Phi_{iç} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot J \cdot (w'')^2 \cdot dx$$

İç enerji potansiyeli formül F 83 ile hesaplanır.

$$\Phi_{iç} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^L \frac{M^2}{E\cdot J}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^L E\cdot J\cdot (w'')^2\cdot dx \qquad \text{F 83}$$

1.4.2. Dış kuvvetlerin potansiyeli "$\Phi_{dı}$"



Şekil 43, Dış kuvvetlerin potansiyeli

Dış kuvvetlerin potansiyeli şu formülle hesaplanır. $V = -F\cdot\Delta L$. Dış kuvvetlerin potansiyeli "V" negatiftir (–), çünkü dış kuvvet F katettiği yol "ΔL" de potansiyel enerji kaybeder.

$$\Phi_{dı} = -F_{iş}\cdot\Delta L = -\frac{F_{iş}}{2}\cdot\int_0^L w'^2\cdot dx$$

Şimdi burada oluşan toplam potansiyel enerjiyi bilinen değerlerle yazarsak formül F 85 bulunur.

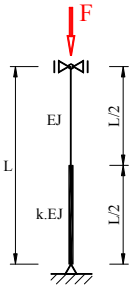
$$\Phi_{top} = \Phi_{iç} + \Phi_{dı} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^L E\cdot J\cdot w''^2\cdot dx - \frac{F_{iş}}{2}\cdot\int_0^L w'^2\cdot dx \qquad \text{F 84}$$

Buradan Rayleigh oranı "R(w)" bulunur. Rayleigh oranının minimum değeri kritik eksenel kuvveti, diğer deyimle Euler kuvvetini verir (bkz F 80).

$$R_{min} = F_{kr} = F_E \qquad R(w) = \frac{\int_0^L E\cdot J\cdot w''^2\cdot dx}{\int_0^L w'^2\cdot dx} \rightarrow \min \qquad \text{F 85}$$

1.4.3. Enerji metodu için örnek

Vianello metodu için verilmiş olan alıştırma örneğini ele alıp Enerji metodu ile ***"k = 1"*** için sonucun kontrolünü yapalım, Burada ***1. kabul*** olarak sehim eğrisini ikinci dereceden parabol olarak kabul edelim ve herhangi bir x deki sehimi yazalım:



Şekil 44, Enerji metodu için örnek

$$w(x) = w_0\cdot\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

$$w'(x) = w_0\cdot\left(\frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2}\right)$$

$$w''(x) = w_0\cdot\frac{-2}{L^2} = -\frac{2\cdot w_0}{L^2}$$

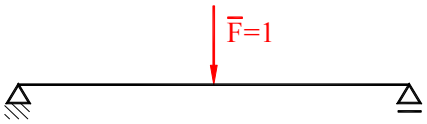
$$\int_0^L w''^2\cdot dx = \int_0^L\left(\frac{2\cdot w_0}{L^2}\right)^2\cdot dx = \frac{4\cdot w_0^2}{L^3} \qquad \int_0^L w'^2\cdot dx = \int_0^L w_0\cdot\left(\frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2}\right)^2\cdot dx = \frac{w_0^2}{3\cdot L} \qquad \text{buradan}$$

formül F 80 ile: $$F_{kr} = R(x) = \frac{\int_0^L E\cdot J\cdot w''^2\cdot dx}{F\cdot\int_0^L w'^2\cdot dx} = \frac{12\cdot E\cdot J}{L^2} \qquad F_{kr} = R(x) = 1{,}216\cdot\frac{\pi^2\cdot E\cdot J}{L^2}$$

2. kabul olarak $\bar{F}=1$ in sehim eğrisini ücüncü dereceden fonksiyon olarak kabul edelim ve herhangi bir x de sehimi yazalım:

$$w(x)=w_0\cdot f(x)$$

$$w(x)=w_0\cdot\left(\frac{3\cdot x}{L}-\frac{4\cdot x^3}{L^3}\right) \qquad 0\le x\le L/2 \quad \text{için}$$



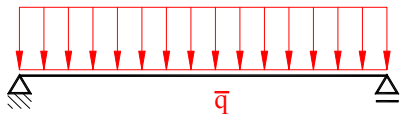
Şekil 45, Basit kiriş

$$F_k=R(x)=\frac{\int_0^L E\cdot J\cdot w''^2\cdot dx}{F\cdot\int_0^L w'^2\cdot dx}=\frac{10\cdot E\cdot J}{L^2}=1{,}013\frac{\pi^2\cdot E\cdot J}{L^2}$$

3. kabul olarak $\bar{q}$ nun sehim eğrisini dördüncü dereceden fonksiyon olarak kabul edelim ve herhangi bir x de sehimi yazalım:

$$w(x)=w_0\cdot f(x)$$

$$w(x)=w_0\cdot\left(\frac{x}{L}-\frac{2\cdot x^3}{L^3}+\frac{x^4}{L^4}\right) \qquad 0\le x\le L/2 \quad \text{için}$$



Şekil 46, Basit kiriş

$$F_k=R(x)=\frac{\int_0^L E\cdot J\cdot w''^2\cdot dx}{F\cdot\int_0^L w'^2\cdot dx}=\frac{168\cdot E\cdot J}{17\cdot L^2}=1{,}001\frac{\pi^2\cdot E\cdot J}{L^2}$$

4. kabul olarak sehim eğrisini sinüs fonksiyonu olarak kabul edelim ve herhangi bir x de sehimi yazalım:

$$w(x)=w_0\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{L}\right) \qquad F_{kr}=R(x)=\frac{\int_0^L E\cdot J\cdot w''^2\cdot dx}{F\cdot\int_0^L w'^2\cdot dx}=\frac{\pi^2\cdot E\cdot J}{L^2}=F_E \qquad \text{tam eşit.}$$

Burada dikkat edilecek husus değerlerin hep gerçek değerden daha büyük bulunmasıdır. Eğer sonuçları herhangi bir k değeri için bulmak istersek sonuçları 2.k/(k+1) ile genişletmemiz gerekir.

1.5. Galerkin metodu

Bu günlerde Ruslar ve Fransızlar matematikte oldukca ileriler. Yukarıdaki örneklerde kabuller η_i ***kinematik vede statik sınır şartlarını*** yerine getiriyorsa problemi şöyle formüle ederiz:

$$\int_0^L \left[(EJw'')''+(Cw')'-q\right]\cdot \eta_i \cdot dx = 0 \qquad (i=1,2,3,....,n)$$

Şöyleki: Çubuğun sehim eğrisinin diferansiyel denklemi ortalamaysa, o zaman kabul fonksiyonları ağırlıklı rol oynar.

Yukarıdaki örnek 2 yi ele alıp Galerkin e göre hesaplayıp karşılaştırmamızı yapalım.

Kabuller: $\xi = x/L$

$w = a\cdot(\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$ $\qquad w(0,l)=0$ $\qquad$ Kinematik sınır şartı

$w' = a\cdot(1-6\xi^2+4\xi^3)$

$w'' = a\cdot(-12\xi+12\xi^2)/L^2$ $\qquad w'(0,l)=0$ $\qquad$ Statik sınır şartı

$w''' = a\cdot(-12+24\xi)/L^3$

$w'''' = a\cdot 24/L^4$

$$\int_0^L \left[EJ\cdot a\cdot\frac{24}{L^4}+\frac{Fa}{L^2}\cdot 12\xi\cdot(1-\xi)-q\right]\cdot a\cdot\left(\xi-2\xi^3+\xi^4\right)\cdot L\cdot d\xi = 0$$

Bu formülden a değeri hesaplanır $\Rightarrow$ $a = \dfrac{7qL}{168EJ-17FL^2}$

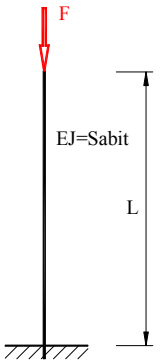
$q\to 0$: $F = \dfrac{168EJ}{17L^2} = 9{,}882\cdot\dfrac{E\cdot J}{L^2} = 1{,}001\cdot\dfrac{\pi^2\cdot E\cdot J}{L^2}$

$F\to 0$: $w(L/2) = \dfrac{5\cdot q\cdot L^4}{384\cdot E\cdot J} = 1\cdot\dfrac{5\cdot q\cdot L^4}{384\cdot E\cdot J}$ $\qquad$ %100 aynı.

Sonuç: Galerkin metodunun Ritz metoduna karşısın kabulleri daha komplike olmasına rağmen çözümü daha basit ve çok daha doğrudur.

1.6. Vianello ve Enerji metoduna teorik örnek

Şekil 47 ile görülen bir tarafı sabit diğer tarafı boşta eksenel kuvvet F ile zorlanan çubukda;



Şekil 47, İdeal çubuk

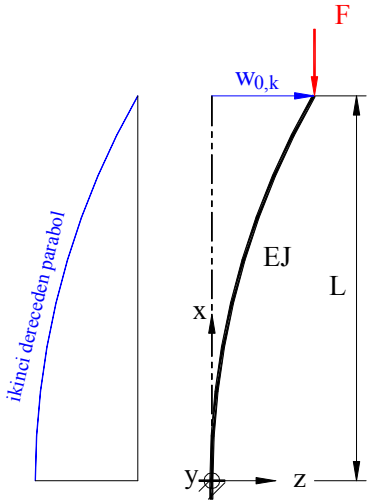
Bilinenler:

Çubuk boyu	L
Eğilme rijitliği	E.J
Çubuğu zorlayan kuvvet	F

Arananlar:

1) Kritik burkulma kuvveti F_k nın Euler burkulma kuvveti ile karşılaştırılması,
2) Burkulma şeklini a çözümünden alarak en yakın burkulma kuvvetinin enerji metoduyla kontrolü ve sonuçların tartışması.

Çözüm 1: Vianello metoduyla çözüm.



Şekil 47_a, İdeal çubukda eğim

Kabuller:

a) Burkulma eğrisi $w_0(x)$ ikinci dereceden parabol.

Fonksiyon: $w_0 = ax^2 + bx + c$

$w'_0 = 2ax + b$

Sınır koşulları: $w(0) = 0 \rightarrow c = 0$

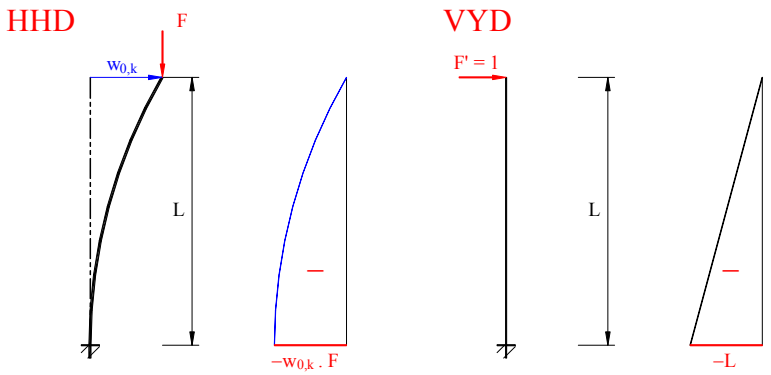
$w'(0) = 0 \rightarrow b = 0$

$w(L) = w_{0,k} \rightarrow a \cdot L^2 = w_{0,k}$

$$a = \frac{w_{0,k}}{L^2}$$

$$w_0(x) = \frac{w_{0,k}}{L^2} \cdot x^2 \qquad \boxed{w_0(x) = w_{0,k} \cdot \frac{x^2}{L^2}}$$

Çözüm için sistemin moment şekilleri için gerçek hareket durumu ve virtüel yükleme durumlarını çizelim, Şekil 47_b.



Şekil 47_b, HHD ve VYD diyagramı

$$w_{1,k} = \int_0^L \overline{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx$$

$$M_0 = F \cdot w_{0,k} \qquad \overline{M} = -L$$

İntegral tablosundan yarım parabol ↓ ←		İntegral boyu "L" dir.
$w_{1,k} = \frac{5}{12} \cdot \overline{M} \cdot M_0 \cdot \frac{L}{EJ}$	$= \frac{5}{12} \cdot (-L) \cdot F \cdot w_{0,k} \cdot \frac{L}{EJ}$	$w_{1,k} = \frac{5 \cdot F \cdot w_{0,k} \cdot L^2}{12 \cdot EJ}$

Diğer taraftan sehim için: $w_{0,k} = w_{1,k}$ ve
Euler kuvveti için $F = F_k$ kabul edersek:

$$w_{1,k} = \frac{5 \cdot F_k \cdot w_{0,k} \cdot L^2}{12 \cdot EJ} = w_{0,k} \qquad \text{Buradan} \qquad F_k = \frac{12 \cdot E \cdot J}{5 \cdot L^2}$$

$$F_k = 2{,}4 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$$

Euler kuvveti:

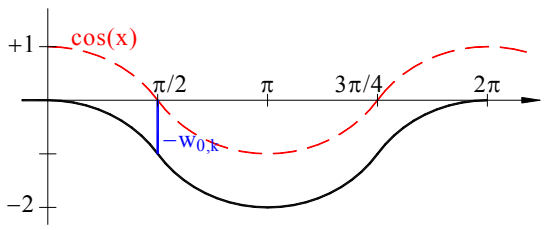
$$F_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L_B^2} \qquad \text{Burkulma boyu } L_B = 2 \cdot L \qquad F_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{4 \cdot L^2}$$

$$F_E = 2{,}47 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}$$

Burada doğruluğun yüzdesi;

$$\Delta F = \frac{F_k - F_E}{F_E} = \frac{2{,}4 - 2{,}47}{2{,}47}$$

$$\Delta F = -0{,}027 = 2{,}7\%$$



Şekil 47_c, İdeal çubukda eğim

Kabuller:

b) Burkulma eğrisi trigonometrik fonksiyon.

Sınır koşulları:

$$w(0) = 0$$
$$w'(0) = 0 \qquad \rightarrow \text{cos eğrisi}$$
$$w(L) = -w_{0,k}$$
$$w''(0) = 0 \qquad \text{DN}$$

cos eğrisi aşağıya doğru -1 çekersek:

$$w(x) = \cos(x) - 1$$

Kabuller, yaklaşımlar:

$$w_0(x) = a \cdot [\cos(bx) - 1]$$
$$w'_0(x) = -ab \cdot \sin(bx)$$
$$w''_0(x) = -ab^2 \cdot \cos(bx)$$

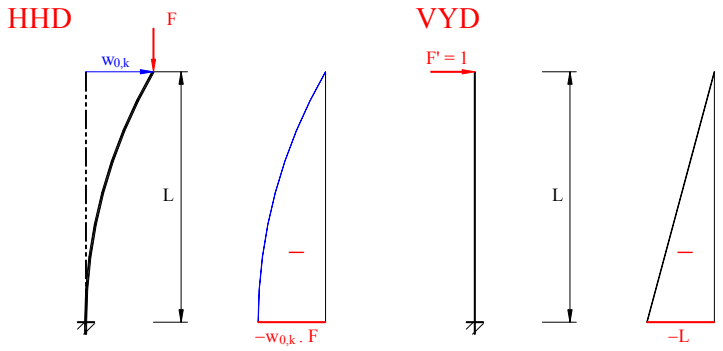
Sınır koşulları: $\cos b \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad b = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad b = \frac{\pi}{2 \cdot L}$

$$w(L) = -w_{0,k} \quad : \quad a \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2L} \cdot L\right) - 1\right] = -w_{0,k} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \boxed{a = w_{0,k}}$$

$$\boxed{w_0(x) = w_{0,k} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2L} \cdot x\right) - 1\right]}$$

Çözüm için sistemin moment şekilleri için gerçek hareket durumu ve virtüel yükleme durumlarını çizelim, Şekil 47_b.

$$\boxed{w_{1,k} = \int_0^L \overline{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx}$$



Şekil 47_d, HHD ve VYD diyagramı

$$\overline{M} = x - L \qquad M(x) = -w_{0,k} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2L} \cdot x\right) \cdot F$$

$$w_{1,k} = \int_0^L (x - L) \cdot \left[-w_{0,k} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2L} \cdot x\right) \cdot F\right] \frac{1}{EJ} \cdot dx$$ integrali kendimizin yapması gerek.

$$w_{1,k} = -\frac{w_{0,k} \cdot F}{EJ} \cdot \int_0^L (x - L) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2L} \cdot x\right) \cdot dx$$

$$w_{1,k} = -\frac{w_{0,k} \cdot F_k}{EJ} \cdot \left(-\frac{4 \cdot L^2}{\pi^2}\right) \qquad w_{1,k} = \frac{w_{0,k} \cdot F_k}{EJ} \cdot \frac{4 \cdot L^2}{\pi^2}$$

$$w_{1,k} = w_{0,k} \quad \rightarrow \quad w_{0,k} = \frac{w_{0,k} \cdot F_k}{EJ} \cdot \frac{4 \cdot L^2}{\pi^2}$$ buradan F_k bulunur: $$\boxed{F_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{4 \cdot L^2}}$$

Görüldüğü gibi Euler kuvvetinin aynısı bulunur.

Çözüm 2: Enerji metoduyla kontrol ve tartışma.

Enerji formülünü yazalım: $\Phi_{top} = \Phi_{iç} + \Phi_{dı}$

Elastik potansiyel: $\Phi_{iç} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L -\frac{M^2}{E \cdot J} \cdot dx$ F 86

Burada $w'' \approx -\frac{M}{E \cdot J}$ den $M = -w'' \cdot E \cdot J$ bulunur ve F 86 formülüne yerleştirilir.

$$\Phi_{iç} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L -\frac{(-w'' \cdot E \cdot J)^2}{E \cdot J} \cdot dx \qquad \Phi_{iç} = \frac{E \cdot J}{2} \cdot \int_0^L -(-w'')^2 \cdot dx$$

$$w''_{0,k} = -a \cdot b^2 \cdot \cos(bx) = w_{0,k} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{4 \cdot L^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot x\right) \qquad \boxed{w''_{0,k} = w''}$$

bu değerleri F 86 formülüne yerleştirelim.

$$\Phi_{iç} = \frac{E \cdot J}{2} \cdot \int_0^L -\left[w_{0,k} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{4 \cdot L^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot x\right)\right]^2 \cdot dx \qquad \boxed{\Phi_{iç} = \frac{E \cdot J}{2} \cdot \frac{w_{0,k}^2 \cdot \pi^4}{32 \cdot L^3}}$$

Dış kuvvetlerin potansiyeli: $\Phi_{dı} = -\frac{F}{2} \cdot \int_0^L w'^2 \cdot dx$ F 87

$$w'_{0,k} = -a \cdot b \cdot \sin(bx) = -w_{0,k} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot x\right) \qquad \boxed{w''_{0,k} = w''}$$

$$\Phi_{dı} = -\frac{F_{iş} \cdot w_{0,k}}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot x\right)\right)^2 \cdot dx \qquad \boxed{\Phi_{dı} = -\frac{F_{iş}}{2} \cdot \frac{w_{0,k} \cdot \pi^2}{8 \cdot L}}$$

$$\Phi_{top} = \Phi_{iç} + \Phi_{dı} = 0$$

$$\frac{E \cdot J}{2} \cdot \frac{w_{0,k}^2 \cdot \pi^4}{32 \cdot L^3} - \frac{F}{2} \cdot \frac{w_{0,k} \cdot \pi^2}{8 \cdot L} = 0$$

$$\frac{w_{0,k}^2 \cdot \pi^2}{8 \cdot L} \cdot \left(\frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{8 \cdot L^2} - \frac{F_k}{2}\right) = 0 \qquad \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{8 \cdot L^2} - \frac{F_k}{2} = 0 \qquad \boxed{F_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{4 \cdot L^2}}$$

Euler kritik kuvvetinin ve b) çözüm şıkkının aynı değeri bulunduğundan yapılan hesaplar doğrudur.

Dikkat: Örnektende görüldüğü gibi Vianello v.b. metotlar eğer burkulmayla zorlanan sistemlerde burkulma boyu bilinmiyor ve açıkca tahmin edilemiyorsa problemin çözümünde kullanılacak yoldur. Eğer burkulma boyu biliniyorsa klasik Euler formülleriyle çözüm gerçekleştirilir.

Burkulmanın teorisi hakkında oldukca detaylı bilgi verdik. Şimdi ***"Pratikte burkulma hesap metotları"***nı görelim.

2. Pratikte burkulma hesabı DIN 18800-2

Burkulma teorisini basit örneklerle gördükten sonra, pratikte hesapların nasıl yapılacağına bakalım. DIN standartlarına göre burkulmada mukavemet hesapları zamanla değişerek şu standartlara göre yapılmıştır:

- DIN 4114-1 e göre (Temmuz 1952) burkulma hesabı, ω – metodu.
- DIN 18800-2 ye göre (Kasım 1990) burkulma hesabı.
- DIN EN 1993-1-1 e göre (Aralık 2010) burkulma hesabı.

Her ne kadar her yeni standart eskisinin geçerliliğini kardırsada burada yalnız ***DIN 18800-2*** ye göre hesaplamayı görelim. Genelde her yeni standart bir öncesinden daha cesur ve daha ekonomik çözüm getiriyorsada eski standartlarla yapılan hesaplarda emniyetli hesap yoludur ve maalesef yeni standartlar daha karmaşık yapılmaktadır. Biz burada yalnız Alman standartlarını örnek aldık. Seçim sizin. Kararı daima konstrüktör verir ve sorumluluğu yüklenir.

2.1. Basma ve eğilme etkili çubuklarda burkulma mukavemet hesabı

Yalnız basma kuvveti etkili çubuklarda bile sehimden dolayı muhakkak bir eksenli eğilme momenti oluşacaktır. Burkulma hesabını teoride gördüğümüz gibi yapıp, mukavemet kontrolü hesabını DIN 18800-2 ye göre yapalım.

$$S_{He} = \frac{F_{iş}}{\chi_B \cdot F_{pl}} + \frac{\beta_m \cdot M_{max}}{M_{pl}} + \Delta n \leq 1 \qquad \text{F 88}$$

Burada formül F 88 ile kesit geometrisinin alakası olmadığı görülmektedir. Bu formülle çubuğun kesitini hesaplamak imkansızdır. Burada ya tecrübelere dayanarak veya Eulere göre kostrüksiyon ve kesit ölçüleri seçilip kontrol formül F 88 ile yapılarak karar verilir.

Konstrüksiyon ölçülerinin seçildiğini kabul edersek kontrol hesabının gidiş yolu şöyledir:

- Azaltma faktörü "χ_B" nin tespiti,
- Tam plastiklik sağlayan eksenel kuvvet "F_{pl}" ğin hesabı,
- Eğilme momentinin etkisi,
- Fonksiyon kontrolu.

Burkulma için moment faktörü " β_m "

Burkulma için moment faktörü DIN 18800-2, sayfa 16, Tablo 11 den aktarılmış Tablo 2 ile bulunur.

Tam plastiklikte eğilme momenti " M_{pl} "

Profilin tam plastiklikte eğilme momenti ya profil tablolarından veya formül F 89 ile bulunur.

$$M_{pl} = W_{eğ} \cdot f_{EM} \qquad \text{F 89}$$

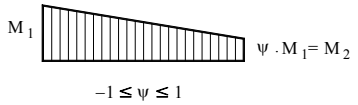
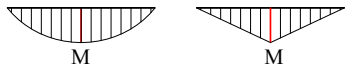
Çift simetrili kesitlerde eğer ***"$F > 0{,}2.F_{pl}$"*** ve dikme alanı ***"$A_{dik} \geq 0{,}18.A_P$"*** profil alanının 0,18 den büyükse (ki bu çoğu haddelenmiş standart profilde görülür) tam plastiklikte eğilme momenti "M_{pl}" yerine ***"$1{,}1.M_{pl}$"*** değeri kullanılır.

Düzeltme faktörü "Δn"

Detaylı hesaplarda düzeltme faktörü "Δn" F 90 ile hesaplanır. En fazla 0,1 kabul edileceğinden pratikte doğrudan 0,1 değeri kabul edilir.

$$\Delta n = \frac{F_{iş}}{\chi_B \cdot F_{pl}} \cdot \left(1 - \frac{F_{iş}}{\chi_B \cdot F_{pl}}\right) \cdot \chi_B^2 \cdot \lambda_B^2 \leq 0{,}1 \qquad \text{F 90}$$

Tablo 2, Burkulmada moment faktörleri " β_m ve β_M " (DIN 18800-2 den aktarma özet)

Moment dağılımı	Moment faktörü β_m Bir eksenli eğilme momentli burkulma için	Moment faktörü β_M İki eksenli eğilme momentli burkulma için
	$\beta_{m\psi} = 0{,}66 + 0{,}44 \cdot \psi \geq 0{,}44$ $\beta_{m\psi} \geq 1 - \frac{1}{\eta_{Ki}} \qquad \psi = \frac{M_2}{M_1} \leq 1{,}0$	$\beta_{M,\psi} = 1{,}8 - 0{,}7 \cdot \psi$ $\psi = \frac{M_2}{M_1} \leq 1{,}0$
	$\beta_m = 1{,}0$	$\beta_{M,q} = 1{,}3$ $\beta_{M,F} = 1{,}4$

Şekil 48, Burkulmada moment faktörleri

2.2. Basma ve iki eksenli eğilme etkili çubuklarda burkulma mukavemet hesabı

Basma ve iki eksenli eğilme etkili çubuklarda burkulma mukavemet kontrolü F 91 ile yapılır.

$$S_{He} = \frac{F_{iş}}{\chi_B \cdot F_{pl}} + \frac{M_y}{M_{ply}} \cdot k_y + \frac{M_z}{M_{plz}} \cdot k_z \leq 1 \qquad \text{F 91}$$

Kesitte plastikliği sağlayan minimum moment "M_{pl}"

Kesite göre plastikliği sağlayan minimum momentler.

$$M_{ply} = W_y \cdot f_{EM} \quad ; \quad M_{plz} = W_z \cdot f_{EM} \qquad \text{F 92}$$

Genelde plastikliği sağlayan minimum momentler eğilme momentinin plastiklik şekil faktörü "α_{ply}" ile genişletilirler. $\alpha_{ply} > 1$ olduğundan, küçük bir emniyet katsayısı olarak hesaplarda dikkate alınmamıştır.

Eksene göre bağıntılı narinlik derecesine bağlı moment değişikliği faktörü

Eksenlere göre bağıntılı narinlik derecesine bağlı moment değişikliği faktörü.

$$k_y = 1 - \frac{F_{iş}}{\chi_{By} \cdot F_{pl}} \cdot a_y \leq 1{,}5 \quad ; \quad k_z = 1 - \frac{F_{iş}}{\chi_{Bz} \cdot F_{pl}} \cdot a_z \leq 1{,}5 \qquad \text{F 93}$$

Eksene göre bağıntılı narinlik derecesine bağlı moment değişikliği faktörü için katsayı "a_i"

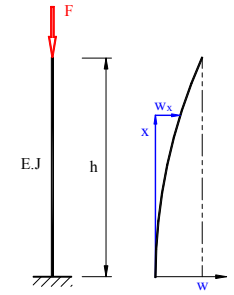
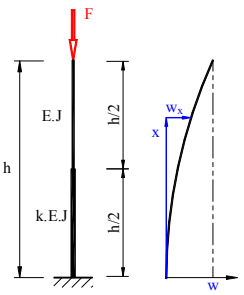
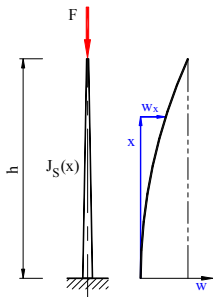
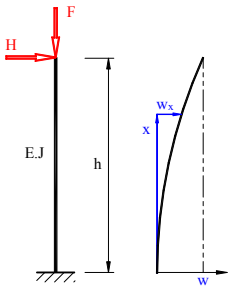
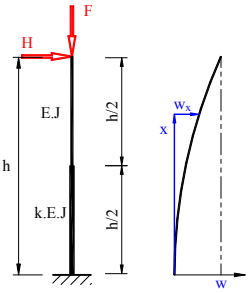
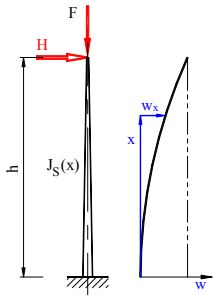
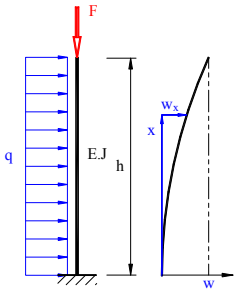
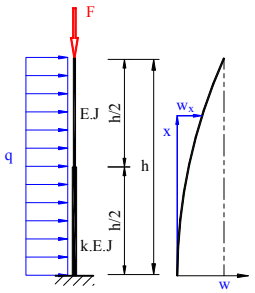
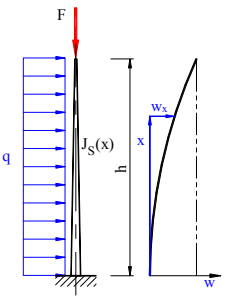
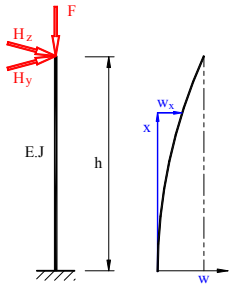
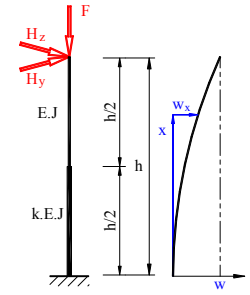
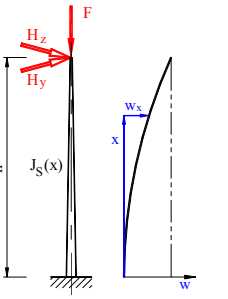
$$a_y = \lambda_{By} \cdot (2 \cdot \beta_{My} - 4) + (\alpha_{ply} - 1) \leq 0{,}8$$
$$a_z = \lambda_{Bz} \cdot (2 \cdot \beta_{Mz} - 4) + (\alpha_{plz} - 1) \leq 0{,}8 \qquad \text{F 94}$$

Eksene göre burkulma için moment değişikliği faktörü "β_{Mi}" Tablo 2 ile bulunur.

Plastiklik şekil faktörü ***"α_{pl}"***.

$$\alpha_{pl} = \frac{M_{pl}}{M_{el}} \geq 1{,}0 \qquad \text{F 95}$$

2.3. Tek çubuklar için sayısal örnekler

Zorlanma:	$E.J_S$ sabit	$E.J_S$ ani değişen fakat her kısımda sabit	$E.J_S$ x e bağlı devamlı değişen
Yalnız eksenel kuvvet	 1.1 J_S sabit. *Ornek_I_11.pdf*	 1.2 J_S, 2 kısım. *Ornek_I_12.pdf*	 1.3 $J_S(x)$ değişen. *Ornek_I_13.pdf*
Eksenel kuvvet ve kesme kuvvetinden oluşan eğilme momentli	 2.1 J_S sabit. *Ornek_I_21.pdf*	 2.2 J_S, 2 kısım. *Ornek_I_22.pdf*	 2.3 $J_S(x)$ değişen. *Ornek_I_23.pdf*
Eksenel kuvvet ve çapraz yayılı yükten oluşan eğilme momentli	 3.1 J_S sabit. *Ornek_I_31.pdf*	 3.2 J_S, 2 kısım. *Ornek_I_32.pdf*	 3.3 $J_S(x)$ değişen. *Ornek_I_33.pdf*
Eksenel kuvvet ve iki eksenli eğilme momentli	 4.1 J_S sabit. *Ornek_I_41.pdf*	 4.2 J_S, 2 kısım. *Ornek_I_42.pdf*	 4.3 $J_S(x)$ değişen. *Ornek_I_43.pdf*

Bu örneklerin sayısal çözümlerini sitede yukarıda verilen dosyalarda bulabilirsiniz.
Önerim önce problemi çözmeye bakın. Sonra çözümlerle karşılaştırın. İyi eylenceler...

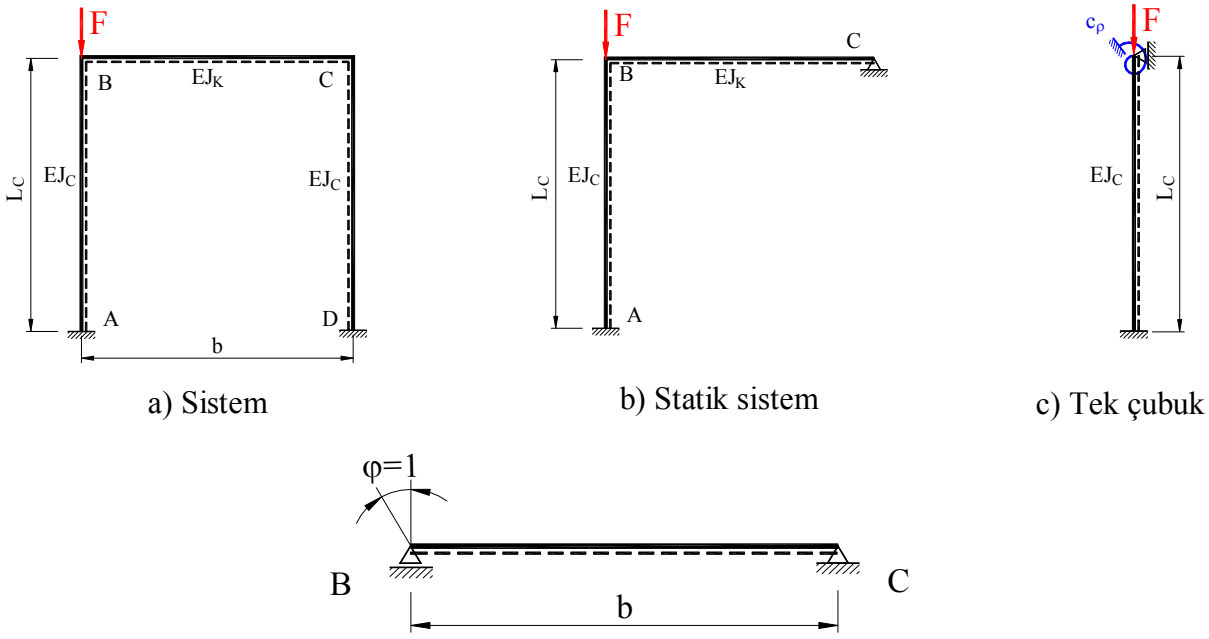
2.4. Çerçeve sistemler

Buraya kadar hep tek çubuk problemlerini gördük. Pratikte genel olarak problemler tek çubuk problemleri olmayıp bir sistem problemidir ve genelde çerçeve problemleri olarak teknik literatürde görülür. Çerçeve problemleride, sistem parçasının sistemden arındırınarak tek çubuk problemi olarak çözülür. Bu çözüm yolu ***"Yedek çubuk metodu"*** olarak tanınır.

Aşağıda bu gibi problemlerin ***Vianello metodu***yla çözümünü göreceğiz.

2.4.1. Çerçevelerde Euler burkulma kuvvetinin analitik hesabı

Aşağıda Şekil 49 a) ile görülen iki ucu sabit bağlantılı nal çerçeve sisteminde kritik Euler kuvveti F_{kr} in analitik hesabı şu şekilde yapılır. Sistem Şekil 49 b) ve c) şekliğle gösterilir ve Şekil 49 c) ile



Dönme rijitliği hesabı

Şekil 49, İki ucu sabit bağlantılı nal çerçeve

görülen tek çubukta kiriş eşit dönme rijitliği "c_ρ" olan yay olarak gösterilir (bkz F 96) ve dönme

Dikkat: b kiriş boyudur!

$$\boxed{c_\rho = \frac{3 \cdot E \cdot J_K}{b}} \qquad \text{F 96}$$

rijitliği Şekil 49 d) ile görülen kiriş ve iş denkleminin yardımıyla kolayca hesaplanır.
Şekil 49 c) ile görülen tek çubukta genel homojen çözüm (F 16) ve dört bilinmeyen C_1-C_3 ile k sınır şartlarının tespitiyle bulunur.
Dikkat: Kısaltma için formüllerde $k = k_B.L$ sembolü kullanılmıştır.

$w(0) = 0$ $\qquad$ $C_2 = -1$

$w'(0) = 0$ $\qquad$ $C_1 = -k_B.C_3$

$w(L) = 0 = 1 - C_3.(k_B.L) - \cos(k_B.L) + C_3.\sin(k_B.L)$ $\qquad$ $C_3 = \dfrac{\cos(\kappa) - 1}{\sin(\kappa) - k_B \cdot L}$

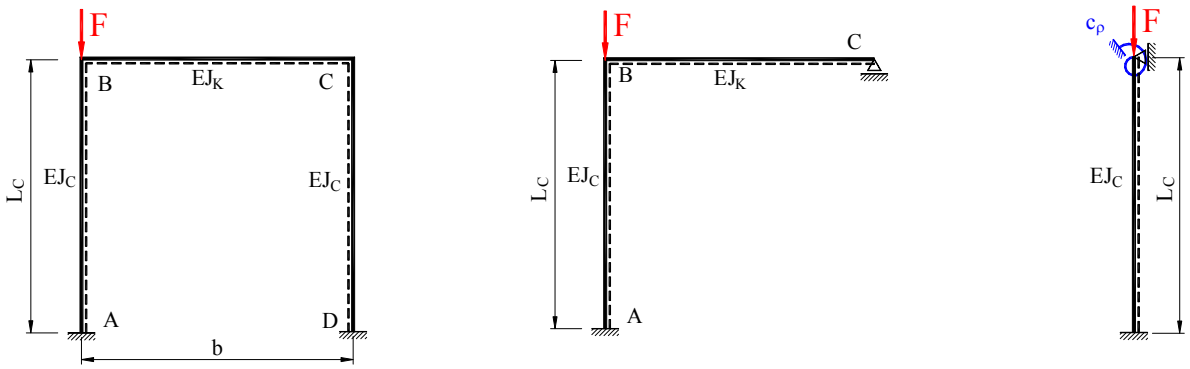
$M(L) = c_\rho.w'$

$$c_\rho \cdot [C_1 - k_B \cdot C_2 \cdot \sin(\kappa) + C_3 \cdot k_B \cdot \cos(\kappa)] = E \cdot J_C \cdot k_B^2 \cdot [C_2 \cdot \cos(\kappa) + C_3 \cdot \sin(\kappa)] \qquad \text{F 97}$$

F 96 formülünün yardımı ve yukarıda belirlenen sınır şartlarıyla formül F 98 bulunur ve bilinen eğilme rijitliği, çubuk boyu L ve kiriş boyu b ile k nın numerik değeri bulunur. Her iki sınır değerleri $\frac{E \cdot J_K \cdot L}{E \cdot J_C \cdot b} \to 0$ ve $\frac{E \cdot J_K \cdot L}{E \cdot J_C \cdot b} \to \infty$ ile daha önce bulunan özel hal formülleri F 17 ve F 18 bulunur.

$$\frac{3 \cdot E \cdot J_K \cdot L}{E \cdot J_C \cdot b} \cdot [2 - 2 \cdot \cos(\kappa) - k_B \cdot L \cdot \sin(\kappa)] = \kappa \cdot [\kappa \cdot \cos(\kappa) - \sin(\kappa)] \qquad \text{F 98}$$

Şekil 50 a) ile görülen sistemde C noktasında hareketli yatak düşünülüp CD tek çubuk olarak ayrılır ve homojen çözüm sınır şartlarındada w(L)=0 yerine $V_z(L) = F \cdot w'(L)$ kabul edilirse:



a) Sistem b) Statik sistem c) Tek çubuk

Şekil 50, Bir ucu sabit diğer ucu hareketli dayahıklı nal çerçeve

$$[\sin(\kappa) + C_3 \cdot \cos(\kappa)] = [-C_3 + \sin(\kappa) + C_3 \cdot \cos(\kappa)] \qquad \text{F 99}$$

Buradanda $C_3 = 0$ için F 97 formülüyle F 100 formülü bulunur. Buradanda bilinen değerlerle burkulma boyu L_B nin numerik değeri kolayca hesaplanır.

$$\frac{3 \cdot E \cdot J_K \cdot L}{E \cdot J_C \cdot b} \cdot \sin(\kappa) = -\kappa \cdot \sin(\kappa) \qquad \text{F 100}$$

Bilinen değerlerle ve yukarıdaki sınır şartlarıyla bulunan formüller, daha önce bulduğumuz F 25 ve F 19 formülleridir.

Yukarıda gördüğümüz her iki çerçevede (sabit/hareketli) çeşitli EJ_C, EJ_K, b, L değerleriyle burkulma boyu L_B nin numerik değeri hesaplanır. Bilinen EJ_C, EJ_K, b, L değerleriyle bütün halleri bir diyagramda toplamak için η faktörlü (Tabellenbuch SZS C4, sayfa 20) yeni denklem oluşur:

$$\varsigma = \eta \cdot \frac{E \cdot J_K \cdot L}{E \cdot J_C \cdot b} \qquad \text{F 101}$$

Faktör β: Tabellenbuch SZS C4, sayfa 20

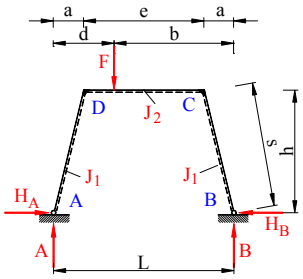
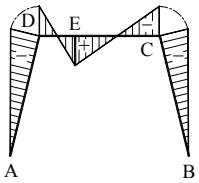
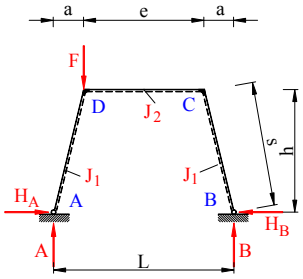
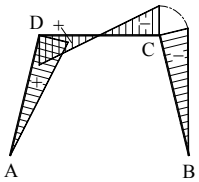
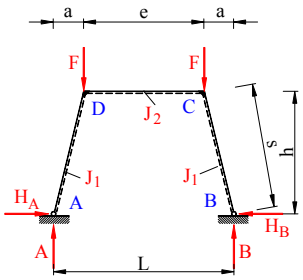
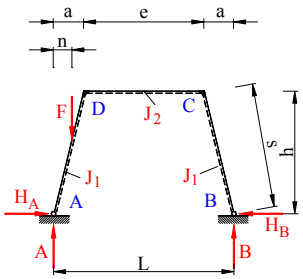
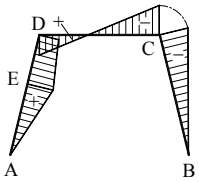
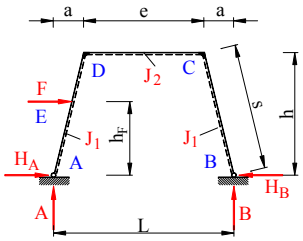
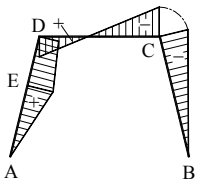
$$\beta = \frac{\pi}{k_B} \cdot L \qquad \text{F 102}$$

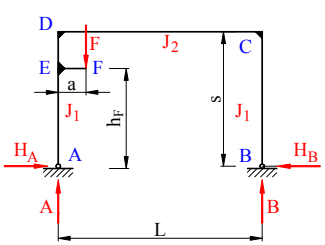
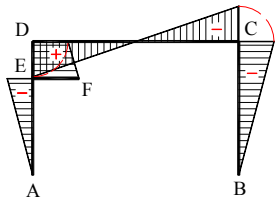
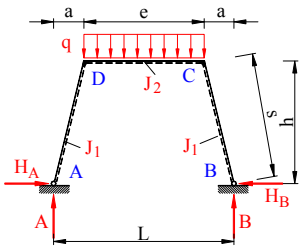
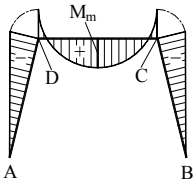
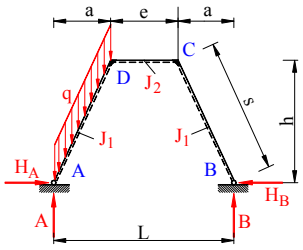
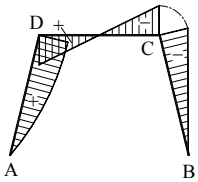
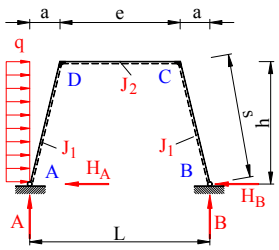
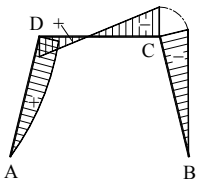
Bu denklemlerle burkulma boyu L_B nin kabaca okunacağı diyagramlar veya burkulma boyu L_B nin tam değerini gösteren tablolar oluşur. Bkz. ***Tabellenbuch SZS C4-2006***, Sayfa 20, sitede ***Tabellenbuch SZS C5*** i PDF olarak bulursunuz. Bunu internetten 17.07.2016 da internetten indirdim. Belki C4 ü de indirme imkanı vardır! Bol şans!

2.4.2. Çerçevelerde dayanak kuvvetleri ve moment dağılımı

J_1 = Ayakların eylemsizlik momenti
J_2 = Üst bağlantının eylemsizlik momenti

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{s}{e} \qquad m = 2 \cdot h \cdot (2 \cdot k + 3)$$

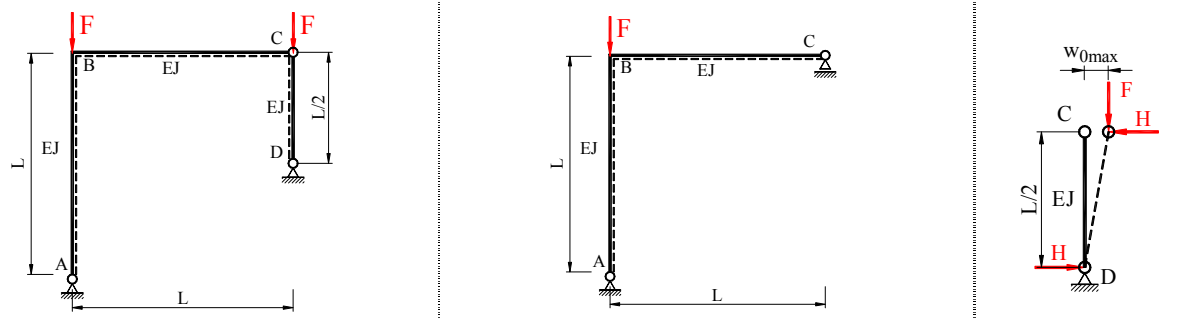
	Sistem ve Zorlama	Moment dağılımı	Dayanak kuvvetleri ve eğilme momenti
1			$A = F \cdot \frac{b}{L}$; $B = F \cdot \frac{d}{L}$ $H_A = H_B = \frac{F}{e \cdot m} \cdot \left[3 \cdot \left(d \cdot b - a^2\right) + 2 \cdot a \cdot e \cdot k\right]$ $M_C = B \cdot a - H_B \cdot h = F \cdot a \cdot d / L - H_B \cdot h$ $M_D = -H_A \cdot h + A \cdot a = -H_A \cdot h + F \cdot a \cdot b / L$ $M_E = A \cdot d - H_A \cdot h = F \cdot d \cdot b / L - H_A \cdot h$
2			$A = F \cdot \frac{L - a}{L}$; $B = F \cdot \frac{a}{L}$ $H_A = H_B = 0{,}5 \cdot F \cdot a / h$ $M_C = -0{,}5 \cdot F \cdot a \cdot \frac{e}{L}$ $M_D = 0{,}5 \cdot F \cdot a \cdot \frac{e}{L}$
3			$F_A = F_B = F$ $A = B = F$ $H_A = H_B = F \cdot \frac{a}{h}$ Her şey simetrik olduğundan moment yoktur.
4			$A = F \cdot \frac{L - n}{L}$; $B = F \cdot \frac{n}{L}$ $H_A = H_B = F \cdot \frac{n}{m} \cdot \left[3 + \left(3 - \frac{n^2}{a^2}\right) \cdot k\right]$ $M_C = B \cdot a - H_B \cdot h$ $M_D = A \cdot a - H_A \cdot h - F \cdot (a - n)$ $M_E = A \cdot n - H_A \cdot h \cdot n / a$
5			$A = B = F \cdot h_F / L$; $H_A = F - H_B$ $H_B = F \cdot h_F \cdot \left[3 + \left(3 - h_F^2 / h^2\right) \cdot k\right] / m$ $M_C = -H_B \cdot h + B \cdot a$ $M_D = H_A \cdot h - A \cdot a - F \cdot (h - h_F)$ $M_E = H_A \cdot h_F - A \cdot a \cdot h_F / h$ Eğer $h_F = h$ olursa: $A = B = F \cdot h / L$ ve $H_A = H_B = 0{,}5 \cdot F$

	Sistem ve Zorlama	Moment dağılımı	Dayanak kuvvetleri ve eğilme momenti
6			$A = F \cdot \frac{L-a}{L}$; $B = F \cdot \frac{a}{L}$ $H_A = H_B = 3 \cdot F \cdot a \cdot \frac{k \cdot \left(s^2 - h_F^2\right) + s^2}{s^2 \cdot m}$ $M_C = -H_B \cdot s$; $M_D = F \cdot a - H_A \cdot s$ $M_E = -H_A \cdot h_F$; $M_F = F \cdot a - H_A \cdot h_F$
7			$A = B = 0{,}5 \cdot q \cdot e$ $H_A = H_B = 0{,}5 \cdot q \cdot e \cdot \left(\frac{a}{h} + \frac{e}{m}\right)$ $M_D = M_C = -0{,}5 \cdot q \cdot e^2 \cdot \frac{h}{m}$ $M_m = \frac{1}{8} \cdot q \cdot e^2 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot h}{m}\right)$
8			$A = 0{,}5 \cdot q \cdot a \cdot (2L - a)/L$; $B = 0{,}5 \cdot q \cdot a^2 / L$ $H_A = H_B = 0{,}25 \cdot q \cdot a^2 \cdot (5k + 6)/m$ $M_D = A \cdot a - H_A \cdot h - 0{,}5 \cdot q \cdot a^2$ $M_D = 0{,}25 \cdot q \cdot a^2 \cdot (e/L - k \cdot h/m)$ $M_C = B \cdot a - H_B \cdot h$ $M_C = -0{,}25 \cdot q \cdot a^2 \cdot (e/L + k \cdot h/m)$
9			$A = B = 0{,}5 \cdot q \cdot h^2 / L$ $H_A = q \cdot h - H_B$; $H_B = 0{,}25 \cdot q \cdot h^2 \cdot \frac{5k + 6}{m}$ $M_D = 0{,}25 \cdot q \cdot h^2 \cdot \left(\frac{e}{L} - \frac{k \cdot h}{m}\right)$ $M_C = -0{,}25 \cdot q \cdot h^2 \cdot \left(\frac{e}{L} + \frac{k \cdot h}{m}\right)$

2.4.3. Çerçevelerde Euler burkulma kuvvetinin Vianello metoduyla yaklaşık hesabı

2.4.3.1. Örnek 1, Çerçevenin sabit kesitli çubuğu

Şekil 51 a) ile verilen çerçevede Euler burkulma kuvveti burkulma boyu tam belirlenemediğinden Vianello metoduyla bulunur. Sistemi statik belirli sistem Şekil 51 b) ve tek çubuk Şekil 51 c) diye ikiye ayıralım. Şekil 51 c) tek çubukda moment eşitliğini yazarsak F 103 formülünü buluruz .



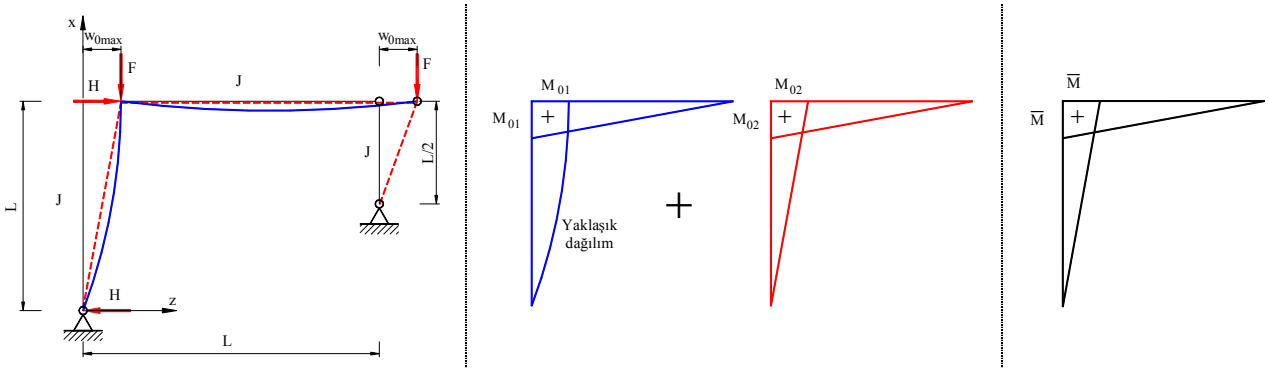
a) Sistem b) Statik belirli sistem c) Tek çubuk

Şekil 51, Statik belirli çerçeve

$$F_{iş} \cdot w_{0max} = \frac{L}{2} \cdot H \qquad \text{F 103}$$

$$H = \frac{2 \cdot F_{iş} \cdot w_{0max}}{L} \qquad \text{F 104}$$

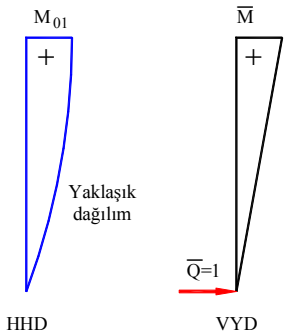
Sistemde HHD ve VYD diyagramlarını yapıp (Şekil 52) iş denklemiyle çözüme gidelim.



a) Sistem b) HHD c) VYD

Şekil 52, Sistemde HHD ve VYD diyagramları

AB çubuğunda F kuvveti etkisinde Şekil 52 b) ve Şekil 52 c) diyagramlarıyla:



$$M_{01} = F_{iş} \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L$$

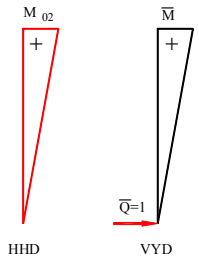
$$w_{11} = \int_0^L \frac{M_{01} \cdot \overline{M}}{E \cdot J} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***parabol ve üçgen*** den:

$$w_{11} = \frac{5}{12} \cdot \frac{F_{iş} \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J} \qquad \text{bulunur}$$

Şekil 53, AB çubuğunda F etkili moment

AB çubuğunda F kuvveti etkisinde Şekil 52 b) ve Şekil 52 c) diyagramlarıyla:



Şekil 54, AB çubuğunda F etkili moment

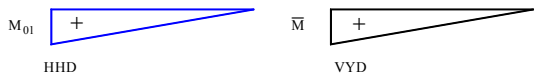
$$M_{02} = H \cdot L = 2 \cdot F_{iş} \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L$$

$$w_{12} = \int_0^L \frac{M_{02} \cdot \overline{M}}{E \cdot J} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot F_{iş} \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J} \quad \text{bulunur}$$

BC kirişinde F kuvveti etkisinde Şekil 52 b) ve Şekil 52 c) diyagramlarıyla:



Şekil 55, BC kirişinde F etkili moment

$$M_{01} = F \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L$$

$$w_{13} = \int_0^L \frac{M_{01} \cdot \overline{M}}{E \cdot J} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_{iş} \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J} \quad \text{bulunur}$$

BC kirişinde H kuvveti etkisinde Şekil 52 b) ve Şekil 52 c) diyagramlarıyla:

Şekil 56, BC kirişinde F etkili moment

$$M_{02} = H \cdot L = 2 \cdot F \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L$$

$$w_{14} = \int_0^L \frac{M_{02} \cdot \overline{M}}{E \cdot J} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{14} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot F_{iş} \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J} \quad \text{bulunur}$$

Bu formüllerle w_{1max} değeri bulunur:

$$w_{1max} = w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14}$$

$$w_{1max} = \frac{5}{12} \cdot \frac{F \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot F \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J} + \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot F \cdot w_{0max} \cdot L^2}{E \cdot J}$$

$$\boxed{w_{1max} = \frac{25}{12} \cdot \frac{F_{iş} \cdot L^2}{E \cdot J} \cdot w_{0max}} \qquad \text{F 105}$$

Burada $\alpha = 1 = \frac{w_{1max}}{w_{0max}}$ bağıntısını ve $F_{iş} = F_{kr}$ kabul edersek formül F 106 ile Euler kuvveti bulunur.

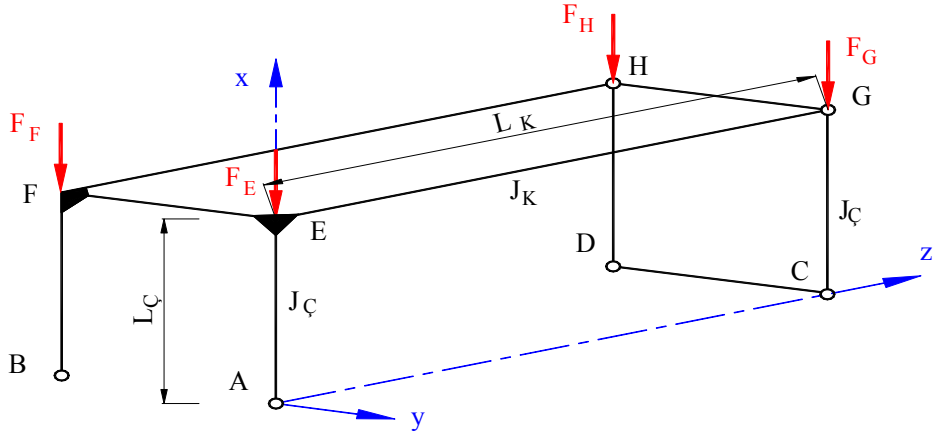
$$\boxed{F_{kr1} = 0{,}480 \cdot \frac{E \cdot J}{L^2}} \qquad \text{F 106}$$

Tam çözüm yapıldığında 0,48 yerine 0,49 bulunur. Buda Vianello metodunun pratikte rahatlıkla kullanılabilirliğini gösterir.

Problemin sayısal çözümünü 2431_Ornek.pdf dosyasıyla sitede bulabilirsiniz.

2.4.3.2. Örnek 2, Çerçevelerin sabit kesitli ortak çubuğu

Şekil 57 ile görülen dik ayaklı sehpa çerçeveleri ele alalım. AE çubuğu iki çerçevenin ortak parçasıdır. Kesin karar vermek için iki çerçeve hesabı yapılır ve en küçük kritik kuvvet esas alınır.

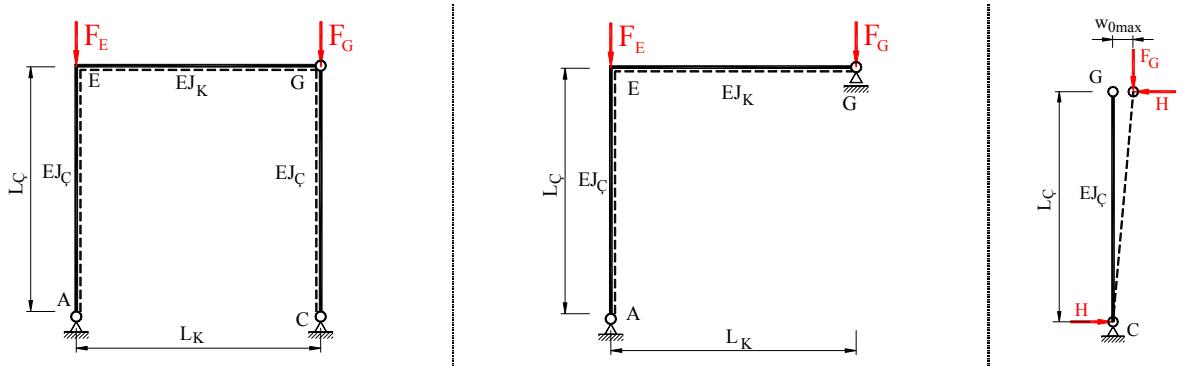


Şekil 57, Dik ayaklı sehpa çerçeveler

Önce xz düzlemini ele alalım ve sonra xy düzlemininde hesabını yapalım.

Problemin sayısal çözümünü 2432_Ornek.pdf dosyasıyla sitede bulabilirsiniz.

2.4.3.2.1. Birinci düzlem, xz düzleminde çubuk



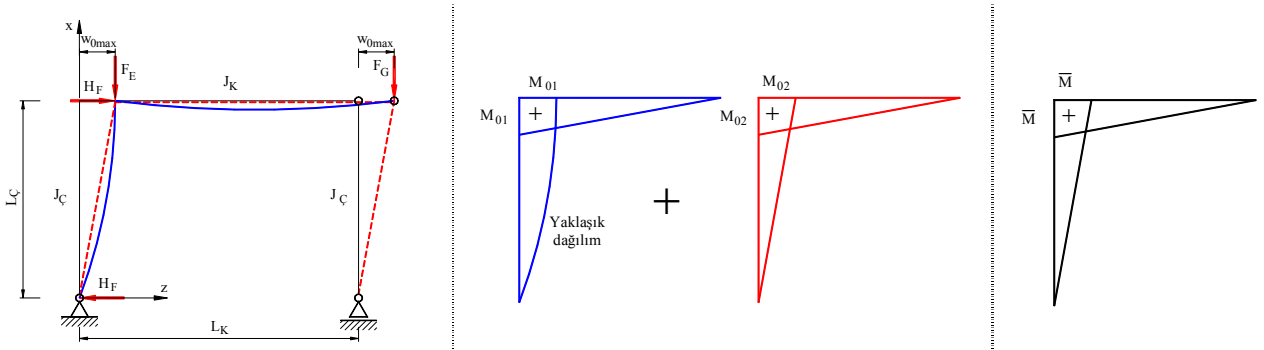
a) Sistem b) Statik belirli sistem c) Tek çubuk

Şekil 58, xz düzleminde statik belirli çerçeve

$$F \cdot w_{0max} = H \cdot L_Ç \qquad \text{F 107}$$

$$H = \frac{F \cdot w_{0max}}{L_Ç} \qquad \text{F 108}$$

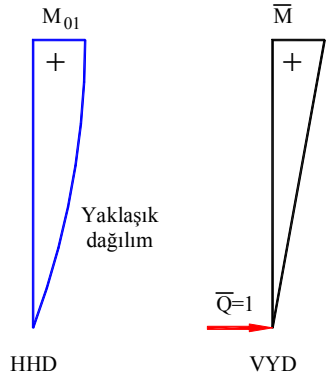
Sistemde HHD ve VYD diyagramlarını yapıp (Şekil 52) iş denklemiyle çözüme gidelim.



a) Sistem b) HHD c) VYD

Şekil 59, Sistemde HHD ve VYD diyagramları

AE çubuğunda F kuvveti etkisinde Şekil 59 b) ve Şekil 59 c) diyagramlarıyla:



Şekil 60, AB çubuğunda F etkili moment

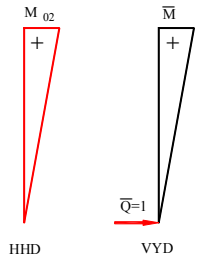
$$M_{01} = F_E \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L_Ç$$

$$w_{11} = \int_0^L \frac{M_{01} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_Ç} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***parabol ve üçgen*** den:

$$w_{11} = \frac{5}{12} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot L_Ç^2}{E \cdot J_Ç} \quad \text{bulunur}$$

AE çubuğunda H_F kuvveti etkisinde Şekil 59 b) ve Şekil 59 c) diyagramlarıyla:



Şekil 61, AB çubuğunda F etkili moment

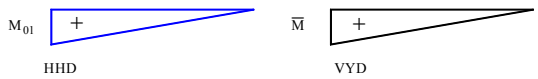
$$M_{02} = H_F \cdot L_Ç = F_E \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L_Ç$$

$$w_{12} = \int_0^L \frac{M_{02} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_Ç} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot L_Ç^2}{E \cdot J_Ç} \quad \text{bulunur}$$

EG kirişinde F kuvveti etkisinde Şekil 59 b) ve Şekil 59 c) diyagramlarıyla:



Şekil 62, BC kirişinde F etkili moment

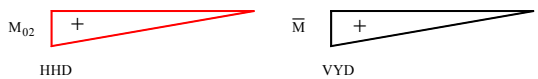
$$M_{01} = F \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L_K$$

$$w_{13} = \int_0^L \frac{M_{01} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_K} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot L_K^2}{E \cdot J_K} \quad \text{bulunur}$$

EG kirişinde H_F kuvveti etkisinde Şekil 59 b) ve Şekil 59 c) diyagramlarıyla:



Şekil 63, EG kirişinde H_F etkili moment

$$M_{02} = H_F \cdot L_Ç = F_E \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L_K$$

$$w_{14} = \int_0^L \frac{M_{02} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_K} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{14} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot L_K^2}{E \cdot J_K} \quad \text{bulunur}$$

Bu formüllerle w_{1max} değeri bulunur:

$$w_{1max} = w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14}$$

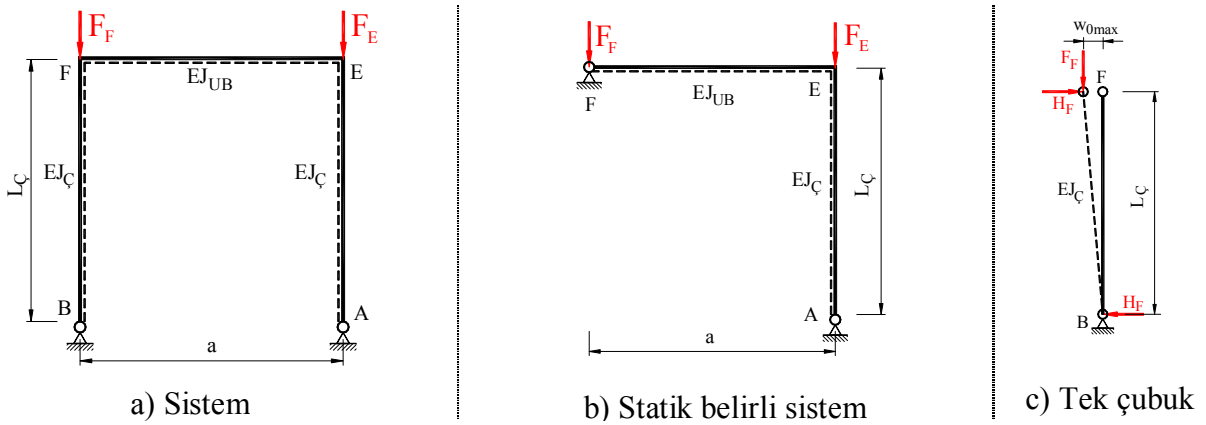
$$w_{1max} = \frac{5}{12}\cdot\frac{F\cdot w_{0max}\cdot L_Ç^2}{E\cdot J_Ç} + \frac{1}{3}\cdot\frac{F\cdot w_{0max}\cdot L_Ç^2}{E\cdot J_Ç} + \frac{1}{3}\cdot\frac{F\cdot w_{0max}\cdot L_K^2}{E\cdot J_K} + \frac{1}{3}\cdot\frac{F\cdot w_{0max}\cdot L_K^2}{E\cdot J_K}$$

$$\boxed{w_{1max} = \frac{F_E\cdot w_{0max}}{12\cdot E}\cdot\left(\frac{9\cdot L_Ç^2}{J_Ç} + \frac{8\cdot L_K^2}{J_K}\right)} \qquad \text{F 109}$$

Burada $\alpha = 1 = \frac{w_{1max}}{w_{0max}}$ bağıntısını ve $F_E = F_{kr}$ kabul edersek formül F 110 ile Euler kuvveti bulunur.

$$\boxed{F_{kr1} = \frac{12\cdot E}{\frac{9\cdot L_Ç^2}{J_Ç} + \frac{8\cdot L_K^2}{J_K}}} \qquad \text{F 110}$$

2.4.3.2.2. İkinci düzlem, xy düzleminde çubuk



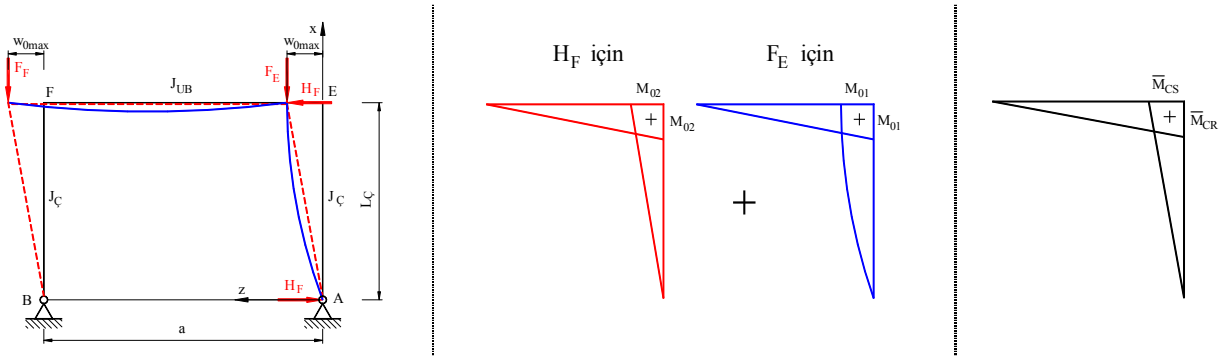
a) Sistem b) Statik belirli sistem c) Tek çubuk

Şekil 64, xy düzleminde statik belirli çerçeve

$$F_E = F_F \qquad \boxed{F_E\cdot w_{0max} = H_F\cdot L_Ç} \qquad \text{F 111}$$

$$\boxed{H_F = \frac{F_E\cdot w_{0max}}{L_Ç}} \qquad \text{F 112}$$

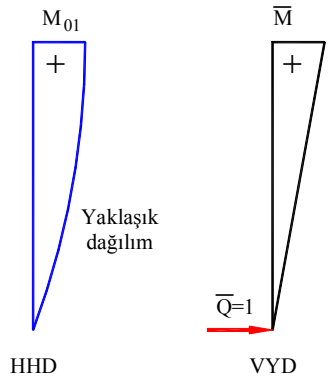
Sistemde HHD ve VYD diyagramlarını yapıp (Şekil 65) iş denklemiyle çözüme gidelim.



a) Sistem b) HHD c) VYD

Şekil 65, Sistemde HHD ve VYD diyagramları

AE çubuğunda F_E kuvveti etkisinde Şekil 65 b) ve Şekil 65 c) diyagramlarıyla:



Şekil 66, AE çubuğunda F_E etkili moment

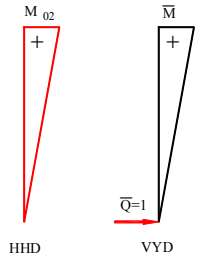
$$M_{01} = F_E \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L_Ç$$

$$w_{11} = \int_0^L \frac{M_{01} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_Ç} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***parabol ve üçgen*** den:

$$w_{11} = \frac{5}{12} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot L_Ç^2}{E \cdot J_Ç} \quad \text{bulunur}$$

AE çubuğunda H_F kuvveti etkisinde Şekil 65 b) ve Şekil 65 c) diyagramlarıyla:



Şekil 67, AB çubuğunda F etkili moment

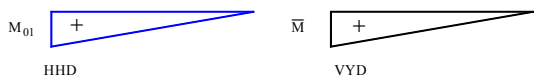
$$M_{02} = H_F \cdot L_Ç = F_E \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = L_Ç$$

$$w_{12} = \int_0^L \frac{M_{02} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_Ç} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot L_Ç^2}{E \cdot J_Ç} \quad \text{bulunur}$$

EG kirişinde F_E kuvveti etkisinde Şekil 65 b) ve Şekil 65 c) diyagramlarıyla:



Şekil 68, BC kirişinde F etkili moment

$$M_{01} = F_E \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = a$$

$$w_{13} = \int_0^L \frac{M_{01} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_{UB}} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot a^2}{E \cdot J_{UB}} \quad \text{bulunur}$$

EG kirişinde H_F kuvveti etkisinde Şekil 65 b) ve Şekil 65 c) diyagramlarıyla:

Şekil 69, EG kirişinde H_F etkili moment

$$M_{02} = H_F \cdot L_Ç = F_E \cdot w_{0max} \qquad \overline{M} = a$$

$$w_{14} = \int_0^L \frac{M_{02} \cdot \overline{M}}{E \cdot J_{UB}} \cdot dx$$

E.J sabit ve çubuklarda ve kirişte aynı olduğundan integral tablosuyla ***üçgen ve üçgen*** den:

$$w_{14} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_E \cdot w_{0max} \cdot a^2}{E \cdot J_{UB}} \quad \text{bulunur}$$

Bu formüllerle w_{1max} değeri bulunur:

$$w_{1max} = w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14}$$

$$w_{1max} = \frac{5}{12} \cdot \frac{F \cdot w_{0max} \cdot L_Ç^2}{E \cdot J_Ç} + \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot w_{0max} \cdot L_Ç^2}{E \cdot J_Ç} + \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot w_{0max} \cdot a^2}{E \cdot J_{UB}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot w_{0max} \cdot a^2}{E \cdot J_{UB}}$$

$$w_{1max} = \frac{F_E \cdot w_{0max}}{12 \cdot E} \cdot \left(\frac{9 \cdot L_Ç^2}{J_Ç} + \frac{8 \cdot a^2}{J_{UB}} \right) \qquad \text{F 113}$$

Burada $\alpha = 1 = \frac{w_{1max}}{w_{0max}}$ bağıntısını ve $F_E = F_{kr}$ kabul edersek formül F 110 ile Euler kuvveti bulunur.

$$F_{kr2} = \frac{12 \cdot E}{\frac{9 \cdot L_Ç^2}{J_Ç} + \frac{8 \cdot a^2}{J_{UB}}} \qquad \text{F 114}$$

Problemin sayısal çözümünü 2432_Ornek.pdf dosyasıyla sitede bulabilirsiniz.

2.4.3.2.3. İki düzlem sonuçlarının karşılaştırılması

Karşılaştırma için sayısal örnek yapmamız gereklidir. Şu değerleri kabul edelim:

Zorlama kuvveti	$F_E = 400$ kN	
Geometri	$L_Ç = 8$ m	$L_K = 18$ m
	$a = 2$ m	
Malzeme Elastiklik modülü	S235	$E = 210000$ MPa
Eylemsizlik momentleri	$J_Ç = 333.7.10^6$ mm^4	$J_K = 7447.10^6$ mm^4
	$J_{UB} = 703.10^6$ mm^4	
xz düzlemi için kritik burkulma kuvveti	$F_{kr1} = \frac{12 \cdot E}{\frac{9 \cdot L_Ç^2}{J_Ç} + \frac{8 \cdot L_K^2}{J_K}}$	$F_{kr1} = 1215$ kN
xy düzlemi için kritik burkulma kuvveti	$F_{kr2} = \frac{12 \cdot E}{\frac{9 \cdot L_Ç^2}{J_Ç} + \frac{8 \cdot a^2}{J_{UB}}}$	$F_{kr2} = 1422$ kN

Hesap sonuçlarına göre $F_{kr1} = 1215$ kN sistemin taşıyacağı maksimum kuvvettir ve işletmede 3,0 kat emniyet vardır, bkz F 115.

$$S_B = \frac{F_{kr1}}{F_E} = \frac{1215}{400} = 3{,}038 \qquad \text{F 115}$$

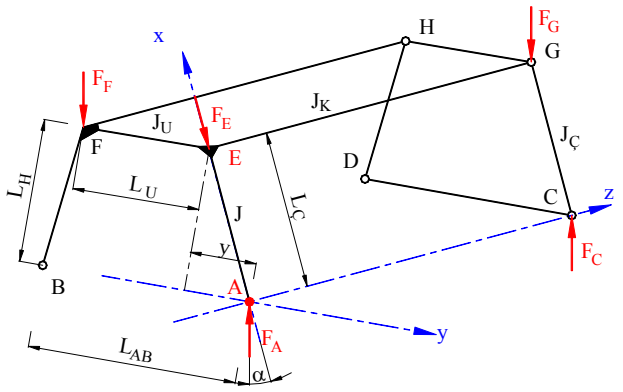
Bu örnekte görüldüğü gibi seçimde önemli rolü iki kesitin kiriş sehim değerleri oynar. Kirişlerin sehim değerleri:

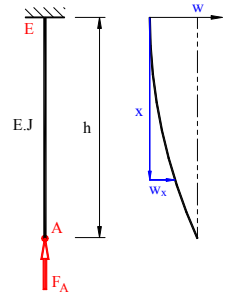
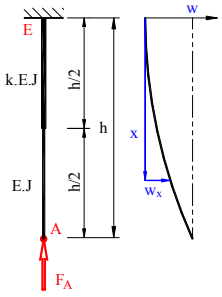
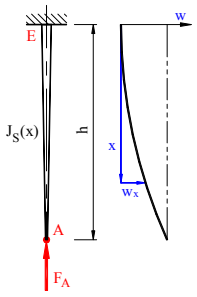
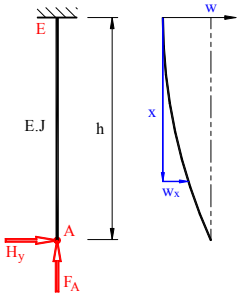
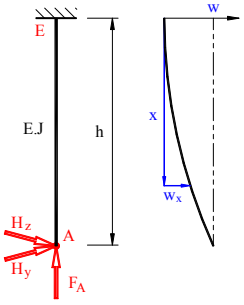
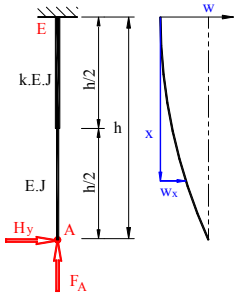
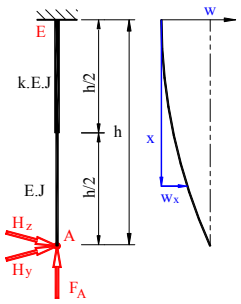
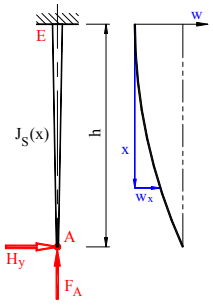
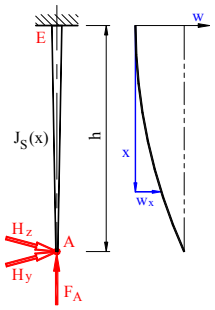
xz düzlemindeki çerçevede: $k_{xz} = \frac{L_K^2}{J_K}$

xy düzlemindeki çerçevede: $k_{xy} = \frac{a^2}{J_{UB}}$

Hesaba başlamadan önce bu değerler kontrol edilirse hesabın hangi çerçeve ile yapılması gerektiği bulunur. Değeri büyük olan tarafta kritik kuvvet küçük olacağından hesap değeri büyük olan tarafta yapılır.

2.5. Çerçeveler için sayısal örnekler



1. Sütun AE Çubuğu, J_S sabit.	2. Sütun AE Çubuğu, J_S ani değişen fakat her kısımda sabit	3. Sütun Çubuğu, $J_S(x)$ x e bağlı devamlı değişen
 *Ornek_II_11.pdf*	 *Ornek_II_12.pdf*	 *Ornek_II_13.pdf*
 	 	  *Ornek_II_33.pdf*

Bu örneklerin sayısal çözümlerini sitede yukarıda verilen dosyalarda bulabilirsiniz.

Yukarıda 9 örnek vermemize rağmen sisteme göre yalnız 1. sıradaki örnekler çözüldüğünde çözümler ait oldukları sütunlarında çözüm yoludur. Ayrıca *Ornek_II_33.pdf* in çözümüde verilmiştir. İsteyen diğer çözümleri yapıp bunun doğruluğunu kontrol edebilir.

3. Formüller özet

Tanımı	Formülü		
Alan "A"	$A = \frac{J}{i^2}$		
Azaltma faktörü "χ_B"	$\chi_B = \frac{1}{\varphi_B + \sqrt{\varphi_B^2 - \lambda_B^2}}$		
Burkulma boyu "L_B", yaklaşık	$L_B = \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{F_{kr}}}$; $L_B = \pi \cdot \sqrt{\frac{\alpha_F \cdot E \cdot J}{F_{iş}}}$		
Burkulma parametresi "α_B"	a	0,21	Sıcak şekillenmiş borular ve kaval profiller, Haddeli dar Profiller kuvvetli eksende
	b	0,34	Haddeli profiller kuvvetli eksende, Haddeli dar Profiller zayıf eksende, Kaynaklı I-Profilleri kuvvetli eksende, Normal kaynaklı kutular her eksende
	c	0,49	Haddeli I-Profilleri zayıf eksende ($t_f \leq 100$ mm), Kaynaklı I-Profilleri her eksende ($t_f \leq 40$ mm), Kalın kaynaklı kutular her eksende (a>0,5.t b/t<30), Soğuk şekillenmiş bütün borular, U-, L-, T- ve dolu kesitler ile çok parçalı kolonlar
	d	0,76	Kalın flanşlı haddeli profiller ($t_f > 100$ mm), Kaynaklı I-Profilleri zayıf eksende ($t_f > 40$ mm)
Burkulma yardımcı faktörü "φ_B"	$\varphi_B = 0{,}5 \cdot \left[1 + \alpha_B \cdot (\lambda_B - 0{,}2) + \lambda_B^2\right]$		
Burkulmada emniyet "S_{Bhe}"	$S_{Bhe} = \frac{F_B}{\chi_B \cdot F_{pl}} \leq 1{,}0$		
Büyültme faktörü "μ"	$\mu = \frac{1}{1 - \alpha_F}$; $\mu = \frac{e + w}{e}$		
Çapraz kuvvet, Kesme kuvveti	$V_z = -E \cdot J_y \cdot w'''$ E ve J sabit		
Dönme rijitliği "c_ρ"	$c_\rho = \frac{3 \cdot E \cdot J}{L}$		
Emniyet katsayısı, genel "γ_M"	$\gamma_M = 1{,}1$		
Emniyetli akma gerilmmesi "f_{EM}"	$f_{EM} = \frac{f_y}{\gamma_M}$		
Enerji, dış kuvvetler potansiyeli "$\Phi_{dı}$"	$\Phi_{dı} = F_{iş} \cdot \Delta L = -\frac{F_{iş}}{2} \cdot \int_0^L w'^2 \cdot dx$		
Enerji, iç kuvvetler potansiyeli "$\Phi_{iç}$"	$\Phi_{iç} = \frac{E \cdot J}{2} \cdot \int_0^L w''^2 \cdot dx$; $\Phi_{iç} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M^2}{E \cdot J} \cdot dx$		
Enerji, toplam potansiyel "Φ_{top}"	$\Phi_{top} = \Phi_{iç} + \Phi_{dı}$		
Euler gerilmesi "σ_E"	$\sigma_E = f_y$; $\sigma_E = \frac{F_E}{A}$; $\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{A \cdot L_B^2}$ $\sigma_E = f_y = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_a^2}$		
Eylemsizlik radyusu "i"	$i_{min} = \sqrt{\frac{J}{A}}$; $i^2 = \frac{J}{A}$		

Tanımı	Formülü
Karşı koyma momenti "$W_{eğ}$"	$W_{eğ} = \frac{b \cdot h^2}{6}$ Dikdörtgende ; $W_{eğ} = \frac{2 \cdot J_{eğ}}{b_P}$ Profilde
Kavis "χ"	$\chi = \frac{1}{R}$; $\chi = -w''$; $\chi = \frac{M_{eğ}}{E \cdot J}$
Kuvvet: Kritik "F_{kr}"veya Euler "F_E" kuvveti	$F_{kr} = F_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L_B^2}$; $F_{kr} = \frac{F_{iş}}{\alpha_F}$
Kuvvet: Burkulma kuvveti "F_B"	$F_B = \chi_B \cdot F_{pl}$
Kuvvet: İşletme kuvveti "$F_{iş}$"	$F_{iş} = \alpha_F \cdot F_{kr}$
Kuvvet: Plastiklik kuvveti "F_{pl}"	$F_{pl} = A_P \cdot f_{EM}$; $F_{pl} = \frac{M_{pl}}{w_{top}}$
Kuvvetler oranı "α_F"	$\alpha_F = \frac{F_{iş}}{F_{kr}}$; $\alpha_F = \frac{w_n}{w_{n-1}}$
Merkez noktası mesafesi "k_{el}"	$k_{el} = \frac{W_y}{A}$
Moment "M_{top}", toplam	$M_{top} = M_1 + F \cdot w_{top}$; $M_{top} = M_1 \cdot \frac{1}{1-\alpha_F}$ $M_{top} = \mu \cdot M_1$; $M_{top} = M_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{F_{iş}}{F_{kr}}}$
Moment "M_{topy}", yaklaşık toplam	$M_{topy} = M_0 \cdot \mu$; $M_{topy} = M_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha_F}$
Momenti "$M_{eğ}$", eğilme	$M_{eğ} = F_{iş} \cdot w$; $M_{eğ} = E \cdot J \cdot \chi$; $M_{eğ} = -E \cdot J \cdot w''$ $M_y' = V_z$
Narinlik "λ"	$\lambda = \frac{L_B}{i_{min}}$; $\lambda = \frac{L_B}{\sqrt{J/A}}$
Narinlik, Akma narinliği "λ_E"	$\lambda_E = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
Narinlik, Bağıntılı narinlik "λ_B"	$\lambda_B = \frac{\lambda}{\lambda_a}$
Narinlik, Temel narinlik "λ_a"	$\lambda_a = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
Öz burkulma katsayısı "k_B"	$k_B = \sqrt{\frac{F}{E \cdot J}}$

Tanımı	Formülü
Rayleigh oranı "R(w)"	$R_{(w)} = \dfrac{\int_0^L E \cdot J \cdot w''^2 \cdot dx}{\int_0^L w'^2 \cdot dx}$
Sehim "w"	$w_{max} = \dfrac{F_{iş}}{F_{kr} - F_{iş}} \cdot w_{0,max}$; $w_{max} = \dfrac{\alpha_F}{1-\alpha_F} \cdot w_{0max}$ $w_1 = \alpha_F \cdot w_0$; $w_2 = \alpha_F \cdot w_1 = \alpha_F^2 \cdot w_0$ $w_{top} = w_0 \cdot \mu$; $w_{top} = w_1 \cdot \mu$; $w_{top} = w_0 \cdot \dfrac{1}{1-\alpha_F}$
Sehim , maksimum burkulma"w"	$w_{0max} = k_{el} \cdot \alpha_B \cdot (\lambda_B - 0{,}2)$
Sehim, ön sehimli toplam "e+w"	$w_{top} = e + w = \dfrac{e}{1-\alpha_F}$; $w_{top} = e + w = \dfrac{e}{1 - \dfrac{F_{iş}}{F_{kr}}}$;

4. Konu İndeksi

1

1.dereceli hesaplama kuralı 9

2

2.dereceli hesaplama kuralı 9

3

3.dereceli hesaplama kuralı 9

B

Basit burkulma 12
Burkulma boyu "L_B" nin hesabı 39
Burkulma hesabı 10
Burkulma kuvveti "F_{kr}" nin hesabı 29
Burkulma şartı 29
Burkulma teorisi 11
Burkulma yardımcı faktörü "φ_B" 22, 26
Burkulmada azaltma faktörü "n_F" 23
Burkulmada kavis faktörü "χ_B" 23
Burkulmada moment faktörleri 50
Büyültme faktörü "μ" 20, 29

Ç

Çapraz kuvvet bağıntısı 13
Çapraz kuvvet problemi 19
Çerçeve sistemler 53
Çubuk 9, 10
Çubuklar 9
Çubuktaki toplam deformasyon "w_{top}" 40

D

Diferansiyel denklem 13
Dış kuvvetlerin potansiyeli "$\Phi_{dı}$" 40, 43
Dönme rijitliği "c_ρ" 53
Düzeltme faktörü "Δn" 50

E

Eğilme 11
Eğilme momenti 11
Eğilme rijitliği 11
Elastik eğri 11
Elastiklik problemi 17
En küçük has değer 17
Enerji metodu 42
Euler 12
Euler formülü 12
Euler halleri 14
Euler kuvveti 12, 17
Eulerin 1 inci hali 17
Eulerin 2 nci hali 14
Eulerin 3 üncü hali 14
Eulerin 4 üncü hali 15
Eylemsizlik radyusu 17, 18

F

Flambaj 10

G

Galerkin metodu 45
Genişletilmiş denge problemi 16
Gerilme problemi 21

H

Has kıymet problemi 15

I

İç gerilmeler 17
İç kuvvetlerin potansiyeli "$\Phi_{iç}$" 40, 42
İdeal burkulma 11
İdeal burkulma çubuğu 10, 11

K

Kavis 11
Kendi değer problemi 15
Kinematik bağıntı 13
Kolon 10
Komplike burkulma 15
Kritik basma kuvveti 12
Kritik burkulma kuvveti "F_{kr}" 32
Kuvvetler oranı "α_F" 20, 29

M

Malzeme bağıntısı 13
Merkez noktası mesafesi k_{el} 18
Mesafe " ζ " 21
Moment çapraz kuvvet bağıntısı 13
Moment problemi 19

N

Narinlik λ 17, 18
Narinlik, Bağıntılı narinlik λ_B 18
Narinlik, Temel narinlik λ_a 18

O

Ön sehim 19
Ön sehimli burkulma 19
Öz burkulma katsayısı k_B 12, 15

P

Plastiklik durumu 17

R

Rayleigh oranı "R(w)" 41, 43
Rayleigh-Ritz metodu 40

S

Sehim 11
Şekil değiştirme işi "$\Phi_{iç}$" 42
Sütun 10

T

Tam plastiklikte eğilme momenti 50
Taşınan yük problemi 24
Tek çapraz yük etkisi 35
Toplam deformasyon "w_{top}" ın hesabı 39
Toplam moment "M_{top}" 40
Toplam moment "M_{top}" ın hesabı 39

V

Vianello metodu.....28, 30

Y

Yaklaşık burkulma boyu "L_{By}" nin hesabı.....33
Yedek çubuk metodu.....53