

İlk yayın, 10 Kasım 2014

[www.guven-kutay.ch](http://www.guven-kutay.ch)

# YAPI STATİĞİ

## Virtüel İş Prensibi Alıştırma çözümleri

44-05-4

Bu dosyayı *44\_00\_Yapı Statığına Giriş ve Özet* dosyasıyla beraber incelerseniz daha iyi anlarsınız.

***M. Güven KUTAY, Muhammet ERDÖL***

***En son durum: 19 Ocak 2015***

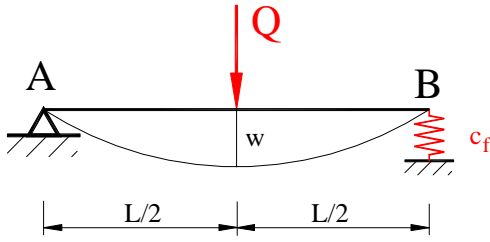
### ***DİKKAT:***

***Bu çalışma iyi niyetle ve bugünün teknik imkanlarına göre yapılmıştır. Bu çalışmadaki bilgilerin yanlış kullanılmasından doğacak her türlü maddi ve manevi zarar için sorumluluk kullanana aittir. Bu çalışmadaki bilgileri kullananlara, kullandıkları yerdeki şartları iyi değerlendirip buradaki verilerin yeterli olup olmadığına karar vermeleri ve gerekirse daha detaylı hesap yapmaları önerilir. Eğer herhangi bir düzeltme, tamamlama veya bir arzunuz olursa, hiç çekinmeden bizimle temasa geçebilirsiniz.***

## İÇİNDEKİLER

1. Bir tarafı hareketsiz diğer tarafı yaylı yataklanmış kiriş .....	3
2. Isı etkisinde portafo kirişte eğim açısı.....	5
3. Bir tarafı sabit diğer tarafı hareketli yataklanmış kiriş .....	6
4. İdeal kafes konstrüksiyonda kaymalar .....	7
5. Yaylı yataklanmış C çerçeve.....	10
6. Bir tarafı yaylı yataklanmış çerçeve.....	14
7. Bir tarafı yaylı T sistem.....	16

### 1. Bir tarafı hareketsiz diğer tarafı yaylı yataklanmış kiriş



Şekil 1 ile görülen sistem ortasından tek kuvvet Q ile zorlanmaktadır.

**Bilinenler:** Q, L ve  $c_f$ .

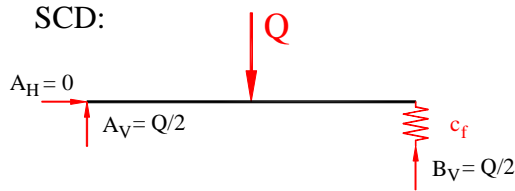
**Arananlar:** Kuvvetin zorladığı noktadaki sehimi w.

Şekil 1, Bir tarafı hareketsiz diğeri yaylı kiriş

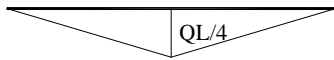
#### Çözüm:

Virtüel Yükleme Durumunda sehimi arandığı C noktasında birim kuvveti  $Q=1$  kabul edilir.

Hakiki Hareket Durumu **HHD**



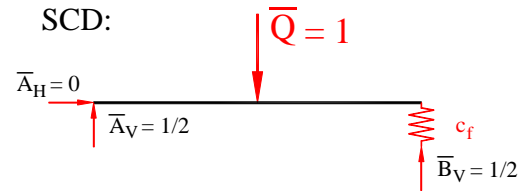
M:



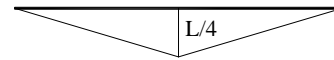
V:



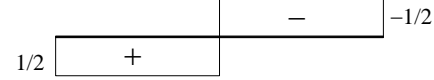
Virtüel Yükleme Durumu **VYD**



M-bar:



V-bar:



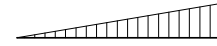
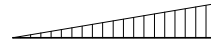
Şekil 1-01, Bir tarafı sabit diğeri tarafı yaylı yataklanmış kirişte hakiki ve virtüel durumlar

Sistemdeki kaymayı hesaplamak için bu sistemdeki iş formülünü yazalım:

$$w = w_M + w_V + \bar{F} \cdot F \cdot c_f$$

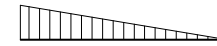
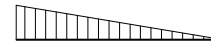
1. terim  $w_M = \int \bar{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx$  sistemin iki tarafının moment dağılımı için iki ayrı hesap yapılır.

Sistemin sol tarafı için moment dağılımı:



İntegral katsayısı  $1/3$  ;  $\bar{M} = L/4$  ;  $M = QL/4$  ve integral boyu  $L/2$  dir.

Sistemin sağ tarafı için moment dağılımı:





İntegral katsayısı  $1/3$  ;  $\bar{M} = -L$  ;  $M = QL/4$  ve integral boyu  $L/2$  dir.

Görüldüğü gibi iki tarafta benzer olduğundan bir tarafın iki katı alınır.



$$w_M = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{QL}{4} \cdot \frac{L}{2EJ}$$

$$w_M = \frac{Q \cdot L^3}{48EJ}$$

2. terim  $w_V = \int \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx$  sistemin iki tarafının çapraz kuvvet dağılımı vardır.

Sistemin sol tarafı için çapraz kuvvet dağılımı:  

İntegral katsayısı 1 ;  $\bar{V} = 1/2$  ;  $V = Q/2$  ve integral boyu  $L/2$  dir.

Sistemin sağ tarafı için çapraz kuvvet dağılımı:  

İntegral katsayısı 1 ;  $\bar{V} = -1/2$  ;  $V = -Q/2$  ve integral boyu  $L/2$  dir.

$$w_V = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{L}{2GA^*} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{L}{2GA^*}$$

$$w_V = \frac{Q \cdot L}{4GA^*}$$

3. terim B yatağındaki yay  $w_f = \bar{B}_V \cdot B_V \cdot c_f$ .

Değerler  $\bar{B}_V = -1/2$  ;  $B_V = -Q/2$  ve yay katsayısı  $c_f$  dir.

$$w_f = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{Q}{2}\right) \cdot c_f$$

$$w_f = \frac{Q}{4} \cdot c_f$$

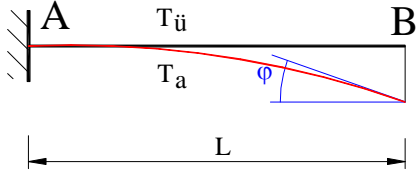
Değerleri ana formülde yerleştirirsek toplam sehimi buluruz.

$$w = w_M + w_V + w_f$$

$$w = \frac{Q \cdot L^3}{48EJ} + \frac{Q \cdot L}{4GA^*} + \frac{Q}{4} \cdot c_f$$

$$w = \frac{Q \cdot L^3}{48EJ} + \frac{Q \cdot L}{4GA^*} + \frac{Q}{4} \cdot c_f$$

## 2. Isı etkisinde portrafo kirişte eğim açısı



Şekil 2 ile görülen sistem ısı etkisindedir.

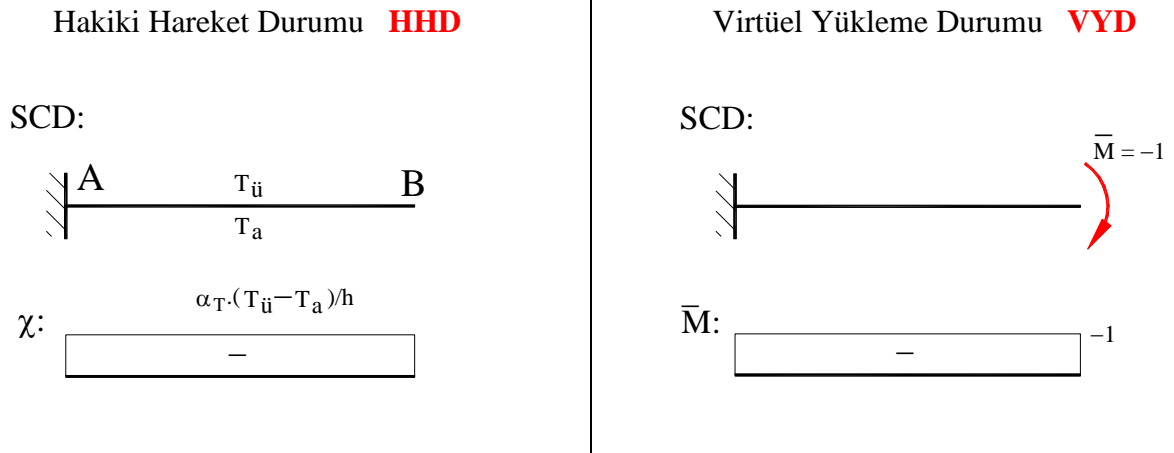
**Bilinenler:**  $\alpha_T$ ,  $T_u$ ,  $T_a$  ve  $L$  ile  $h$  ( $T_u > T_a$ )

**Arananlar:** B tarafındaki eğim açısı  $\varphi_B$ .

Şekil 2, Isı etkisindeki portrafo kirişte eğim açısı

### Çözüm:

Virtüel Yükleme Durumunda eğim açısının arandığı B noktasında birim moment  $M=-1$  kabul edilir.

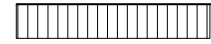


Şekil 2-01, Isı etkisindeki portrafo kirişte hakiki ve virtüel durumlar

B noktasındaki eğim açısını hesaplamak için bu sistemdeki formülü yazalım:

$$\varphi_B = \int \bar{M} \cdot \alpha_T \cdot \frac{T_a - T_u}{h} \cdot dx$$

Sistemde dağılımlar:

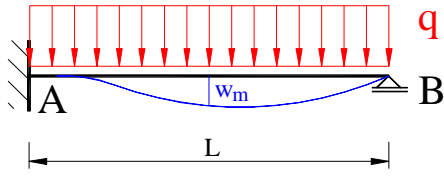


İntegral katsayısı  $1$  ;  $\bar{M} = -1$  ;  $\chi = \alpha_T \cdot \frac{T_a - T_u}{h}$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$\varphi_B = 1 \cdot (-1) \cdot \alpha_T \cdot \frac{T_a - T_u}{h} \cdot L$$

$$\varphi_B = -\alpha_T \cdot \frac{T_a - T_u}{h} \cdot L$$

### 3. Bir tarafı sabit diğer tarafı hareketli yataklanmış kiriş



Şekil 3 ile görülen sistem sabit yayılı yük  $q$  ile zorlanmaktadır.

**Bilinenler:**  $q$  ve  $L$ .

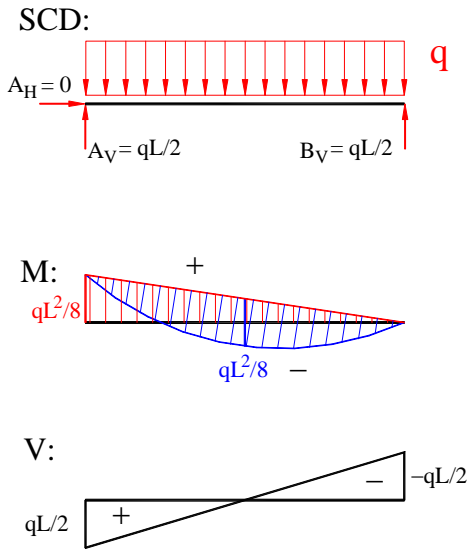
**Arananlar:** Kiriş ortasındaki sehim  $w_m$ .

Şekil 3, Bir tarafı sabit diğer tarafı hareketli kiriş

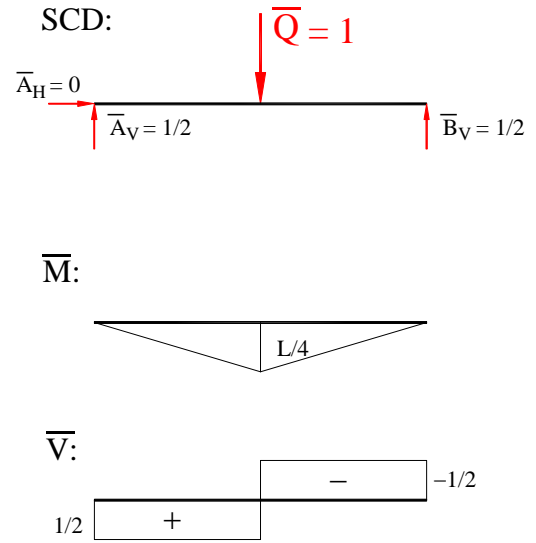
#### Çözüm:

Virtüel Yükleme Durumunda sehimin arandığı kiriş ortasında birim kuvvet  $Q = 1$  kabul edilir.

Hakiki Hareket Durumu **HHD**



Virtüel Yükleme Durumu **VYD**

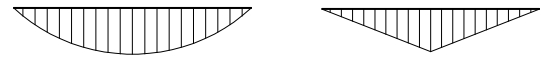


Şekil 3-01, Bir tarafı sabit diğer tarafı hareketli kirişte hakiki ve virtüel durumlar

B noktasındaki eğim açısını hesaplamak için bu sistemdeki formülü yazalım. Çapraz kuvvetin sehimde pratikte dikkate alınmayacağından dolayı, formülümüz yalnız momente dayanır:

$$w_m = w_{M1} - w_{M2}$$

1. terim  $w_{M1} = \int \bar{M} \cdot \frac{M_1}{EJ} \cdot dx$  moment dağılımı:

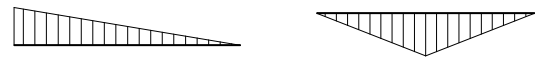


İntegral katsayısı  $5/12$  ;  $\bar{M} = L/4$  ;  $M = qL^2/8$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$w_{M1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot \frac{L}{EJ}$$

$$w_{M1} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EJ}$$

2. terim  $w_{M2} = \int \bar{M} \cdot \frac{M_2}{EJ} \cdot dx$  moment dağılımı:



İntegral katsayısı  $1/4$  ;  $\bar{M} = L/4$  ;  $M = qL^2/8$  ve integral boyu  $L$  dir.

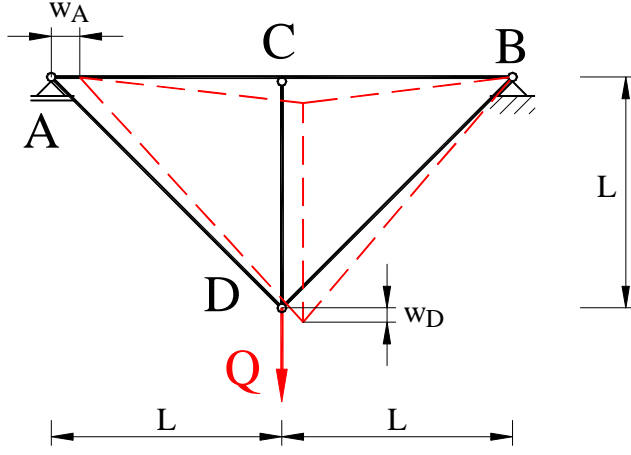
$$w_{M2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot \frac{L}{EJ}$$

$$w_{M2} = \frac{q \cdot L^4}{128 \cdot EJ}$$

$$w_m = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EJ} - \frac{q \cdot L^4}{128 \cdot EJ} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EJ} - \frac{3 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EJ}$$

$$w_m = \frac{q \cdot L^4}{192 \cdot EJ}$$

## 4. İdeal kafes konstrüksiyonda kaymalar



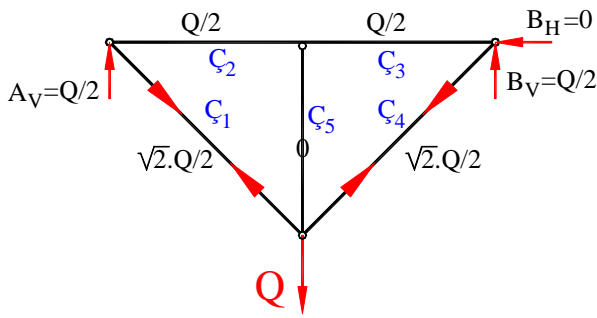
Şekil 4 ile görülen sistem D noktasında tek kuvvet Q ile zorlanmaktadır.

**Bilinenler:** Q ve L.

**Arananlar:** A ve D noktalarındaki kaymalar  $w_A$  ve  $w_D$ .

Şekil 4, İdeal kafes konstrüksiyonda kaymalar

**Çözüm:**



$$\begin{aligned} \Sigma F_H = 0 &\rightarrow B_H = 0 \\ \Sigma M_A = 0 &\rightarrow Q \cdot L - B_V \cdot 2L = 0 \\ &\rightarrow B_V = Q/2 \\ \Sigma F_V = 0 &\rightarrow Q - B_V - A_V = 0 \\ &\rightarrow A_V = Q - Q/2 \\ &\rightarrow A_V = Q/2 \end{aligned}$$

Şekil 4-01, Sistemin SCD 1

Çubukların kuvvetini bulalım:

$$B \text{ noktasında : } \Sigma F_V = 0 \rightarrow B_V - C_4 / \sqrt{2} = 0 \quad C_4 = B_V \cdot \sqrt{2}$$

$$C_4 = Q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow B_H - C_3 - C_4 / \sqrt{2} = 0 \quad 0 - C_3 - Q/2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{Q}{2}$$

$$C \text{ noktasında : } \Sigma F_V = 0 \rightarrow C_V - C_5 = 0 \quad 0 - C_5 = 0$$

$$C_5 = 0$$

A noktasında simetriden dolayı:

$$C_1 = Q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_2 = -\frac{Q}{2}$$

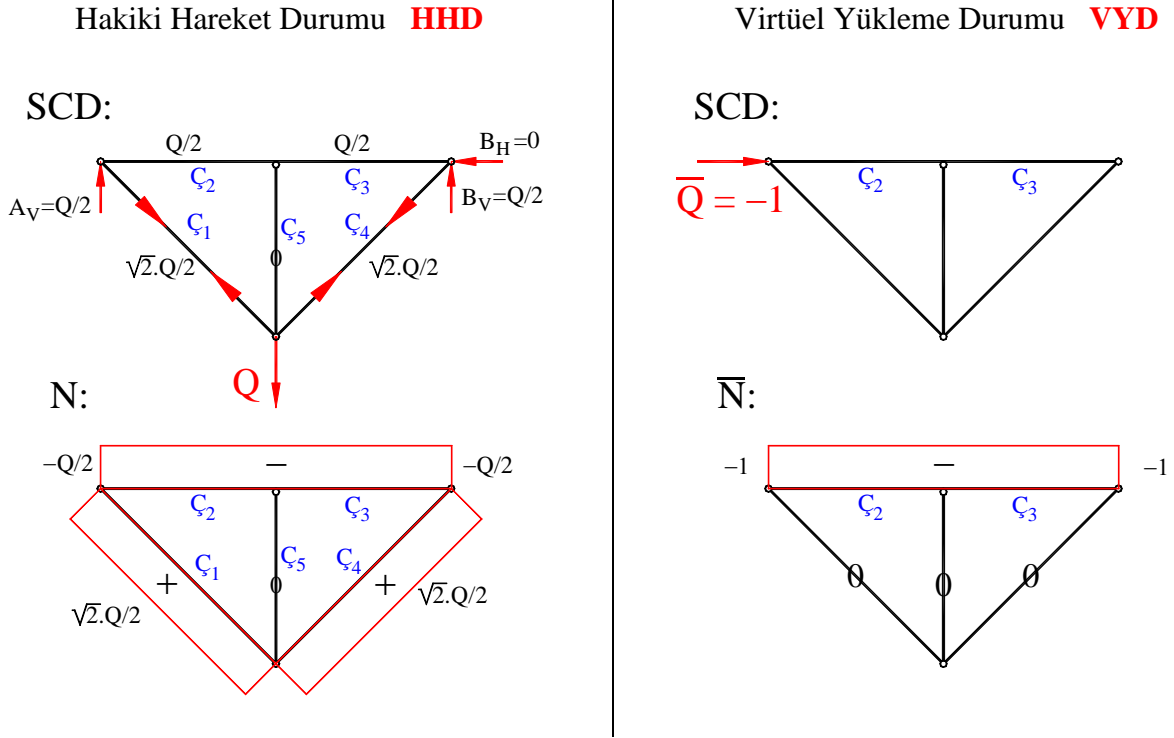
$$D \text{ noktasında kontrol: } \Sigma F_V = 0 \rightarrow Q - C_5 - C_1 / \sqrt{2} - C_4 / \sqrt{2} = 0$$

$$Q - 0 - Q/2 - Q/2 = 0$$

eşitlik doğrudur.

Böylece sistemdeki bütün büyüklükler bulunmuştur.

İlk önce kayma  $w_A$  yı hesaplayalım. Virtüel Yükleme Durumunda A noktasında  $w_A$  yönünde birim kuvvet  $\bar{Q}=1$  (basma yorlaması) kabul edilir.



Şekil 4-02, İdeal kafes konstrüksiyonda  $w_A$  için hakiki ve virtüel durumlar

A noktasındaki kayma için bu sistemdeki formülü yazalım. Burada etkili yalnız normal kuvvet olduğundan Şekil 4-02 ye göre A noktasındaki kayma formülü:

$$w_A = \int \bar{N}_1 \cdot \frac{N_1}{EA} \cdot dx \quad \text{moment dağılımı:} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram of normal force distribution in the real state]} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram of normal force distribution in the virtual state]} \\ \hline \end{array}$$

İntegral katsayısı 1 ;  $\bar{N} = -1$  ;  $N = -Q/2$  ve integral boyu  $2L$  dir.

$$w_A = 1 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{2L}{EA} \quad \underline{\underline{w_A = \frac{Q \cdot L}{EA}}}$$

D noktasındaki kayma  $w_D$  yi hesaplayalım. Virtüel Yükleme Durumunda D noktasında  $w_D$  yönünde birim kuvvet  $\bar{Q}=1$  kabul edilir.

D noktasındaki kayma için bu sistemdeki formülü yazalım. Burada etkili yalnız normal kuvvetler olduğundan Şekil 4-03 e göre D noktasındaki kayma formülü:

$$w_D = w_1 + 2w_2$$

$$1. \text{ terim} \quad w_1 = \int \bar{N}_1 \cdot \frac{N_1}{EA} \cdot dx \quad \text{moment dağılımı:} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram of normal force distribution in the real state]} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram of normal force distribution in the virtual state]} \\ \hline \end{array}$$

İntegral katsayısı 1 ;  $\bar{N} = -1/2$  ;  $N = -Q/2$  ve integral boyu  $2L$  dir.

$$w_1 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{2L}{EA} \quad \boxed{w_1 = \frac{Q \cdot L}{2 \cdot EA}}$$

$$2. \text{ terim} \quad w_2 = \int \bar{N}_2 \cdot \frac{N_2}{EA} \cdot dx \quad \text{moment dağılımı:} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram of normal force distribution in the real state]} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram of normal force distribution in the virtual state]} \\ \hline \end{array}$$

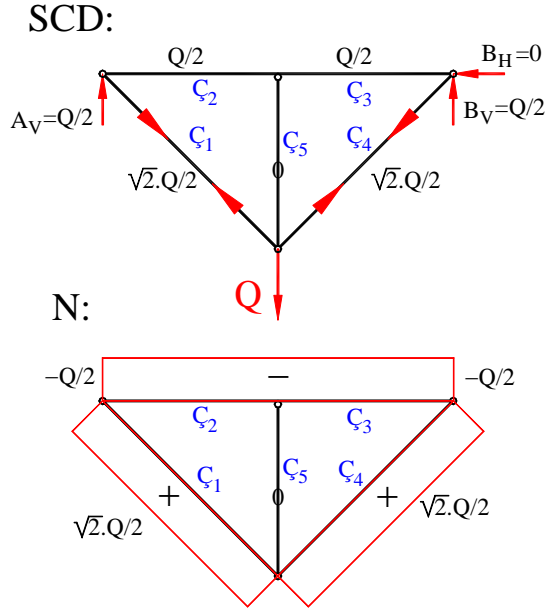
İntegral katsayısı 1 ;  $\bar{N} = \sqrt{2}/2$  ;  $N = \sqrt{2} \cdot QL/2$  ve integral boyu  $\sqrt{2}L$  dir.



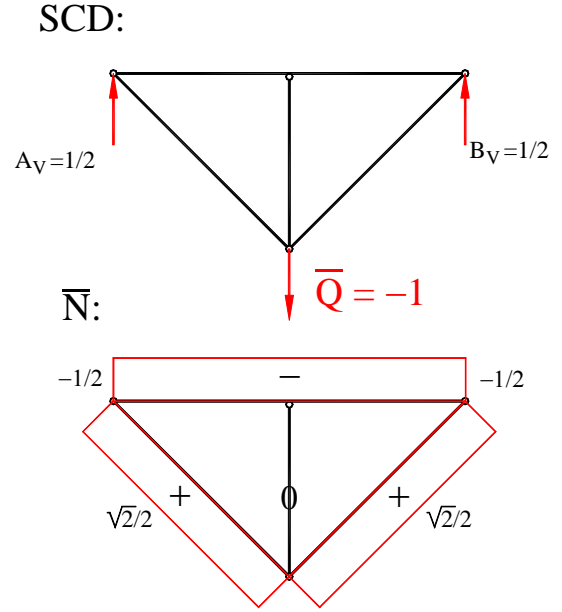
$$w_2 = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot Q}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L}{EA}$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot Q \cdot L}{2 \cdot EA}$$

Hakiki Hareket Durumu **HHD**



Virtüel Yükleme Durumu **VYD**



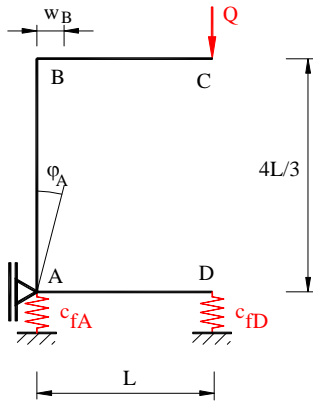
Şekil 4-03, İdeal kafes konstrüksiyonda  $w_D$  için hakiki ve virtüel durumlar

D noktasındaki kayma:

$$w_D = \frac{Q \cdot L}{2 \cdot EA} + \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot Q \cdot L}{2 \cdot EA}$$

$$w_D = \frac{(1 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot Q \cdot L}{2 \cdot EA}$$

## 5. Yaylı yataklanmış C çerçeve



Şekil 5, Yaylı yataklanmış C çerçeve

Şekil 5 ile görülen sistem üst portafö uçtan tek kuvvet  $Q$  ile zorlanmaktadır.

**Bilinenler:**  $Q, L,$

$$c_{fA} = \frac{2 \cdot L^3}{EJ} \text{ ve}$$

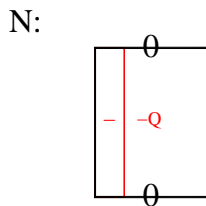
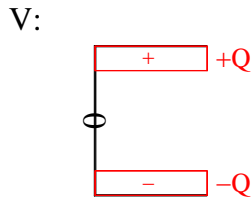
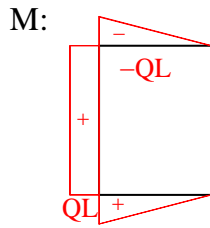
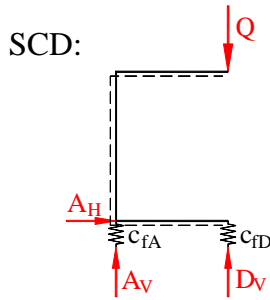
$$c_{fD} = \frac{L^3}{EJ}.$$

**Arananlar:** B noktasındaki kayma  $w_B$  ile A yatağındaki rotasyon açısı  $\phi_A$ .

**Çözüm:**

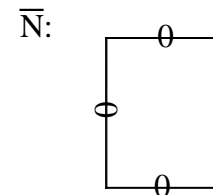
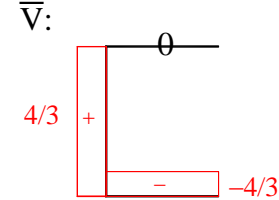
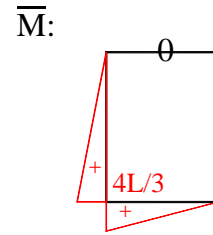
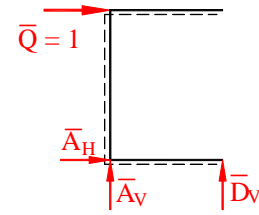
B noktasındaki kayma  $w_{B}$  yi hesaplayalım. Virtüel Yükleme Durumunda B noktasında ve  $w_B$  yönünde birim kuvvet  $\bar{Q} = 1$  kabul edilir.

Hakiki Hareket Durumu **HHD**



Virtüel Yükleme Durumu **VYD**

SCD:



Şekil 5-01, Yaylı yataklanmış C çerçeve için hakiki ve virtüel durumlar

Şekil 5-01 ile görülen değerleri hesaplayalım:

**Hakiki Hareket Durumu HHD da büyüklükler:**

$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow A_H - 0 = 0 \quad \boxed{A_H = 0}$$

$$\text{A noktasında : } \Sigma M_A = 0 \rightarrow D_V \cdot L - Q \cdot L = 0 \quad \boxed{D_V = Q}$$

$$\Sigma F_V = 0 \rightarrow A_V - D_V + Q = 0 \quad A_V = Q - Q \quad \boxed{A_V = 0}$$

**Virtüel Yükleme Durumu VYD da büyüklükler:**

$$\Sigma \bar{F}_H = 0 \rightarrow \bar{A}_H - 1 = 0 \quad \boxed{\bar{A}_H = 1}$$

$$\text{A noktasında : } \Sigma \bar{M}_A = 0 \rightarrow 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot L - \bar{D}_V \cdot L = 0 \quad \boxed{\bar{D}_V = \frac{4}{3}}$$

$$\Sigma \bar{F}_V = 0 \rightarrow \bar{A}_V + \bar{D}_V = 0 \quad \bar{A}_V = -\bar{D}_V \quad \boxed{\bar{A}_V = -\frac{4}{3}}$$

Böylece sistemdeki bütün büyüklükler bulunmuş olur.

B noktasındaki kayma için bu sistemdeki formülü yazalım. Şekil 5-01 e göre B noktasındaki kayma formülü:

$$w_B = w_M + w_V + w_{fA} + w_{fD}$$

$$\text{1. terim } w_{M,AB} = \int \bar{M}_{AB} \cdot \frac{M_{AB}}{EJ} \cdot dx \quad \text{moment dağılımı: } \begin{array}{|c|} \hline \text{[Trapezoidal Moment Distribution]} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Rectangular Moment Distribution]} \\ \hline \end{array}$$

İntegral katsayısı  $1/2$  ;  $\bar{M} = 4L/3$  ;  $M = QL$  ve integral boyu  $4L/3$  dür.

$$w_{M,AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4L}{3} \cdot QL \cdot \frac{4L}{3EJ} \quad w_{M,AB} = \frac{16 \cdot Q \cdot L^3}{18 \cdot EJ}$$

$$w_{M,AD} = \int \bar{M}_{AD} \cdot \frac{M_{AD}}{EJ} \cdot dx \quad \text{moment dağılımı: } \begin{array}{|c|} \hline \text{[Trapezoidal Moment Distribution]} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Trapezoidal Moment Distribution]} \\ \hline \end{array}$$

İntegral katsayısı  $1/3$  ;  $\bar{M} = 4L/3$  ;  $M = QL$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$w_{M,AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4L}{3} \cdot QL \cdot \frac{L}{EJ} \quad w_{M,AD} = \frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{9 \cdot EJ}$$

$$w_M = w_{M,AB} + w_{M,AD} = \frac{16 \cdot Q \cdot L^3}{18 \cdot EJ} + \frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{9 \cdot EJ} \quad \boxed{w_M = \frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{3 \cdot EJ}}$$

$$\text{2. terim } w_{V,AD} = \int \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx \quad \text{çapraz kuvvet dağılımı: } \begin{array}{|c|} \hline \text{[Rectangular Shear Distribution]} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{[Rectangular Shear Distribution]} \\ \hline \end{array}$$

İntegral katsayısı  $1$  ;  $\bar{V} = -4/3$  ;  $V = -Q$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$w_V = 1 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (-Q) \cdot \frac{L}{GA^*} \quad \boxed{w_V = \frac{4 \cdot Q \cdot L}{3 \cdot GA^*}}$$

$$\text{3. terim } w_{fA} = \bar{A}_V \cdot A_V \cdot c_{fA} \quad w_{fA} = -\frac{4}{3} \cdot 0 \cdot \frac{2L^3}{EJ} \quad \boxed{w_{fA} = 0}$$

4. terim  $w_{fD} = \bar{D}_V \cdot D_V \cdot c_{fD}$   $w_{fD} = \frac{4}{3} \cdot Q \cdot \frac{L^3}{EJ}$

$$w_{fD} = \frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{3 \cdot EJ}$$

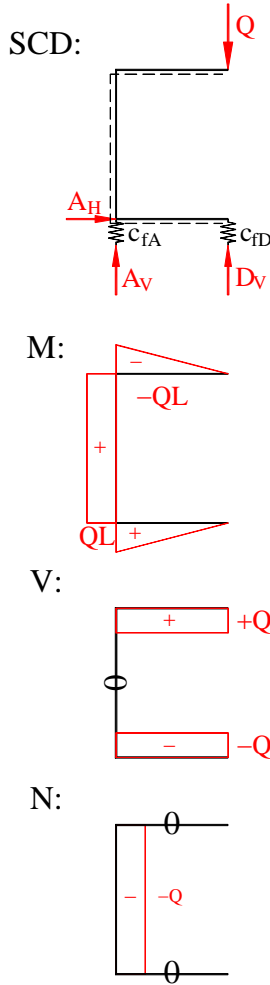
B noktasındaki kayma  $w_B$  yi hesaplayalım:

$$w_B = w_M + w_V + c_{fA} + c_{fD} = \frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{3 \cdot EJ} + \frac{4 \cdot Q \cdot L}{3 \cdot GA^*} + 0 + \frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{3 \cdot EJ}$$

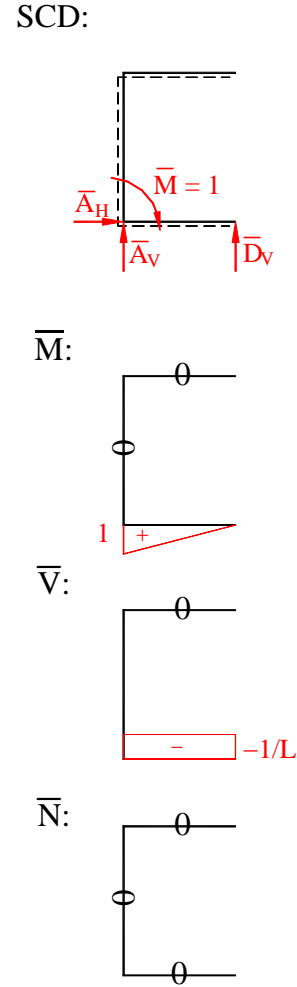
$$w_B = \frac{8 \cdot Q \cdot L^3}{3 \cdot EJ} + \frac{4 \cdot Q \cdot L}{3 \cdot GA^*}$$

A yatağındaki rotasyon açısı  $\varphi_A$  yi hesaplayalım. Virtüel Yükleme Durumunda A noktasında ve  $\varphi_A$  yönünde birim moment  $\bar{M} = 1$  kabul edilir.

Hakiki Hareket Durumu **HHD**



Virtüel Yükleme Durumu **VYD**



Şekil 5-02, Yaylı yataklanmış C çerçevede  $\varphi_A$  için hakiki ve virtüel durumlar

Şekil 5-02 ile görülen değerleri hesaplayalım:

**Virtüel Yükleme Durumu VYD da büyüklükler:**

$$\Sigma \bar{F}_H = 0 \rightarrow \bar{A}_H - 0 = 0$$

$$\bar{A}_H = 0$$

A noktasında :  $\Sigma \bar{M}_A = 0 \rightarrow 1 - \bar{D}_V \cdot L = 0$

$$\bar{D}_V = 1/L$$

$$\Sigma \bar{F}_V = 0 \rightarrow \bar{A}_V + \bar{D}_V = 0$$

$$\bar{A}_V = -\bar{D}_V$$

$$\bar{A}_V = -1/L$$

Böylece sistemdeki bütün büyüklükler bulunmuş olur.

A yatağındaki rotasyon açısı  $\varphi_A$  için bu sistemdeki formülü yazalım. Şekil 5-02 ye göre A yatağındaki rotasyon açısı  $\varphi_A$  formülü:

$$\varphi_A = \varphi_M + \varphi_V + \varphi_{fA} + \varphi_{fD}$$

1. terim  $\varphi_M = \int \bar{M}_{AD} \cdot \frac{M_{AD}}{EJ} \cdot dx$

moment dağılımı:



İntegral katsayısı  $1/3$  ;  $\bar{M} = 1$  ;  $M = QL$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$\varphi_M = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot QL \cdot \frac{L}{EJ}$$

$$\varphi_M = \frac{Q \cdot L^2}{3 \cdot EJ}$$

2. terim  $\varphi_{V,AD} = \int \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx$

çapraz kuvvet dağılımı:



İntegral katsayısı  $1$  ;  $\bar{V} = -1/L$  ;  $V = -Q$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$\varphi_V = 1 \cdot \left(-\frac{1}{L}\right) \cdot (-Q) \cdot \frac{L}{GA^*}$$

$$\varphi_V = \frac{Q}{GA^*}$$

3. terim  $\varphi_{fA} = \bar{A}_V \cdot A_V \cdot c_{fA}$   $\varphi_{fA} = -\frac{1}{L} \cdot 0 \cdot \frac{2L^3}{EJ}$

$$\varphi_{fA} = 0$$

4. terim  $\varphi_{fD} = \bar{D}_V \cdot D_V \cdot c_{fD}$   $\varphi_{fD} = \frac{1}{L} \cdot Q \cdot \frac{L^3}{EJ}$

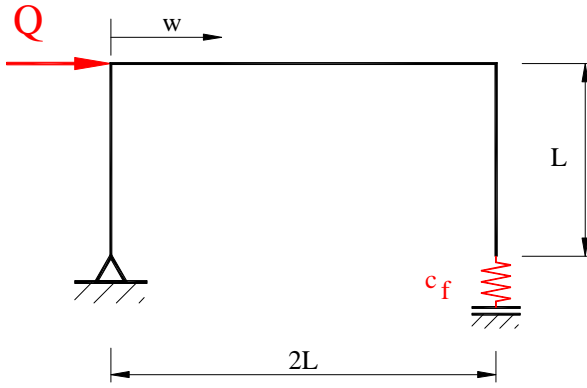
$$\varphi_{fD} = \frac{Q \cdot L^2}{EJ}$$

A yatağındaki rotasyon açısını hesaplayalım:

$$\varphi_A = \varphi_M + \varphi_V + c_{fA} - c_{fD} = \frac{Q \cdot L^2}{3 \cdot EJ} + \frac{Q}{GA^*} + 0 + \frac{Q \cdot L^2}{EJ}$$

$$\varphi_A = \frac{4 \cdot Q \cdot L^2}{3 \cdot EJ} + \frac{Q}{GA^*}$$

## 6. Bir tarafı yaylı yataklanmış çerçeve



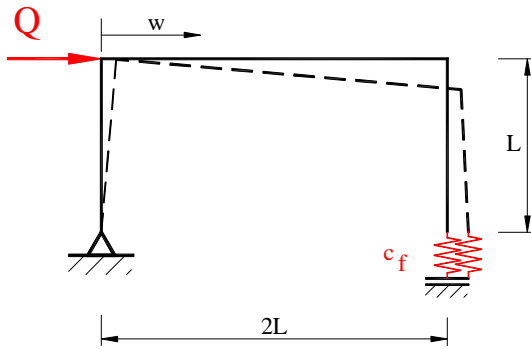
Şekil 6 ile görülen sistem tek kuvvet Q ile zorlanmaktadır.

**Bilinenler:** Q, L ve  $c_f$ .

**Arananlar:** Şekildeğiştirme w.

Şekil 6, Bir tarafı yaylı yataklanmış çerçeve

**Çözüm:**

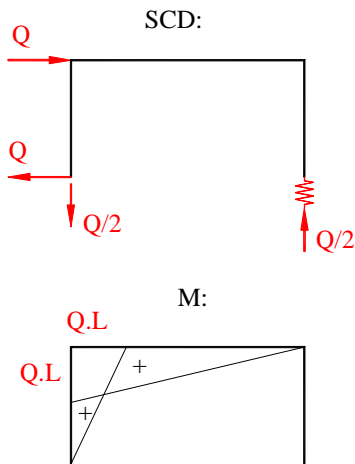


Hatırlayalım:

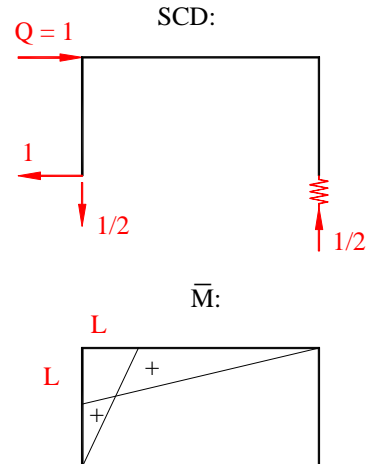
$c_f$ [m/kN]	$c_f$ [rad/kNm]
Birim kuvvette yaylanma	Birim momentte dönme
$c_f$ [m/kN]	$c_f$ [rad/kNm]
$c_f = 0$	$c_f = 0$
$c_f = \infty$	$c_f = \infty$

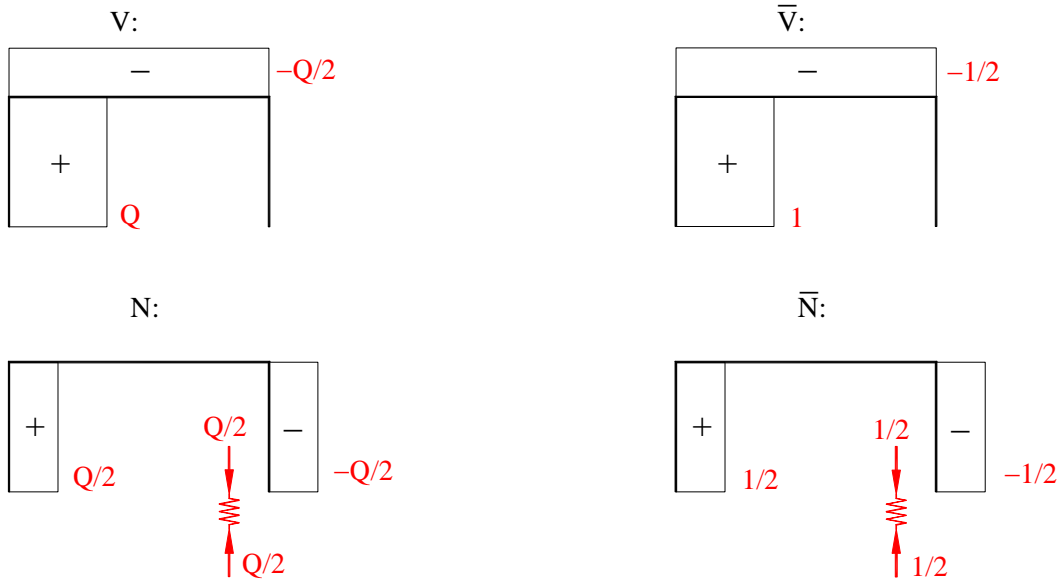
Şekil 6-01, Şekildeğiştirmenin kalitatif çizimi

Hakiki Hareket Durumu **HHD**



Virtüel Yükleme Durumu **VYD**





Şekil 6-02, Çerçeve hakiki ve virtüel durumlar

Sistemdeki kaymayı hesaplamak için iş formülünü yazalım:

$$w = \int \bar{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx + \int \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx + \int \bar{N} \cdot \frac{N}{EA} \cdot dx + \bar{F} \cdot F \cdot c_f$$

1. terim  $\int \bar{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx$  Moment dağılımı

Sol dik kiriş için integral katsayısı  $1/3$ ,  $\bar{M} = L$ ,  $M = Q \cdot L$  ve integral boyu  $L$  bulunur.

Üst kiriş için integral katsayısı  $1/3$ ,  $\bar{M} = L$ ,  $M = Q \cdot L$  ve integral boyu  $2 \cdot L$  bulunur.

$$w_M = \frac{1}{3} \cdot L \cdot QL \cdot \frac{L}{EJ} + \frac{1}{3} \cdot L \cdot QL \cdot \frac{2L}{EJ} = \frac{Q \cdot L^3}{EJ}$$

2. terim  $\int \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx$  kuvvet dağılımı

Sol dik kiriş için integral katsayısı  $1$ ,  $\bar{V} = 1$ ,  $V = Q$  ve integral boyu  $L$  bulunur.

Üst kiriş için integral katsayısı  $1$ ,  $\bar{V} = -1/2$ ,  $V = -Q/2$  ve integral boyu  $2 \cdot L$  bulunur.

$$w_V = 1 \cdot 1 \cdot Q \cdot \frac{L}{GA^*} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{2L}{GA^*} = \frac{3QL}{2GA^*}$$

3. terim  $\int \bar{N} \cdot \frac{N}{EA} \cdot dx$  kuvvet dağılımı

Sol dik kiriş için integral katsayısı  $1$ ,  $\bar{N} = 1/2$ ,  $N = Q/2$  ve integral boyu  $L$  bulunur.

Sağ dik kiriş için integral katsayısı  $1$ ,  $\bar{N} = -1/2$ ,  $N = -Q/2$  ve integral boyu  $L$  bulunur.

$$w_N = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{L}{EA} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{L}{EA} = \frac{QL}{2EA}$$

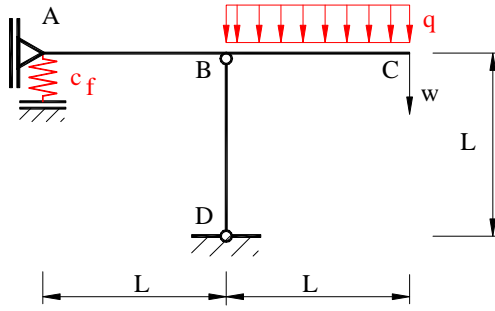
4. terim  $\bar{F} \cdot F \cdot c_f$   $\bar{F} = 1/2$ ,  $F = Q/2$  ve yaylanma  $c_f$  kadardır.

$$w_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2} \cdot c_f = \frac{Q}{4} \cdot c_f$$

Bu değerleri yukarıdaki kayma formülüne yerleştirirsek değeri buluruz:

$$w = \frac{Q \cdot L^3}{EJ} + \frac{3QL}{2GA^*} + \frac{QL}{2EA} + \frac{Q}{4} \cdot c_f$$

## 7. Bir tarafı yaylı T sistem



Şekil 7, Bir tarafı yaylı T sistem

Şekil 7 ile görülen sistem yaylı yük  $q$  ile zorlanmaktadır.

**Bilinenler:** Sistem ve doneleri:

$$L = 6 \text{ m}; q = 2 \text{ kN/m}; \Delta T_1 = \Delta T = 5^\circ\text{C},$$

$$\Delta T_2 = T_a - T_{\bar{u}} = -10^\circ\text{C}; \alpha_T = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

Burada  $\Delta T$  bütün sistemde etkili,  $T_a$  ve  $T_{\bar{u}}$  yalnız yatay kirişte etkili. Kirişler: HEA260  
 $J = 105,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ ;  $A = 8680 \text{ mm}^2$ ;  $h = 250 \text{ mm}$   
 $A^* = A_w = 1735 \text{ mm}^2$ ;  $E = 210 \text{ kN/mm}^2$ ;  
 $G = 81 \text{ kN/mm}^2$ ;  $c_f = 1 \text{ mm/kN}$

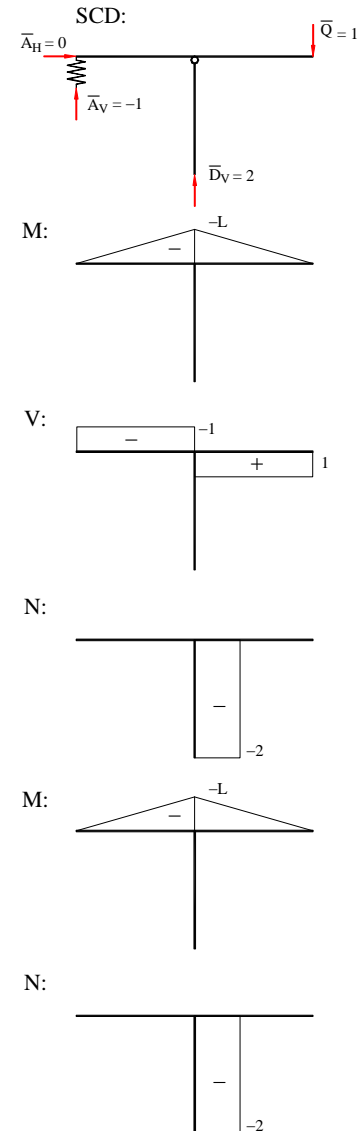
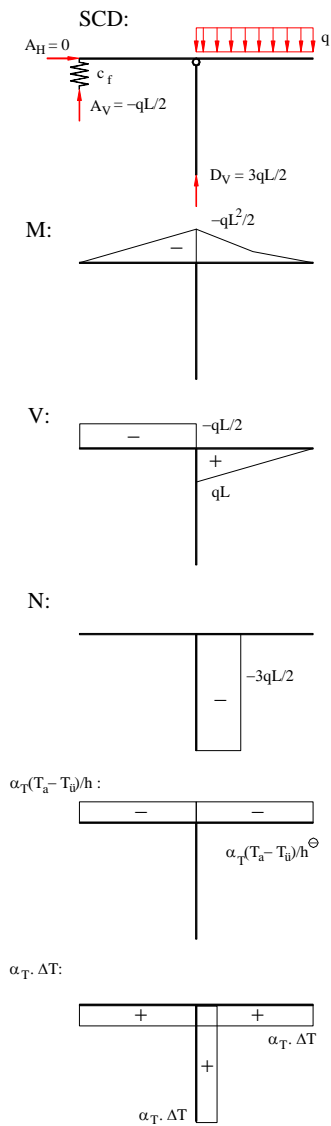
**Arananlar:** C noktasındaki  $w_C$ .

**Çözüm:**

Virtüel Yükleme Durumunda sehimin arandığı C noktasında birim kuvveti  $Q=1$  kabul edilir.

Hakiki Hareket Durumu **HHD**

Virtüel Yükleme Durumu **VYD**



Şekil 7-01, Bir tarafı yaylı T sistemde hakiki ve virtüel durumlar

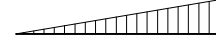
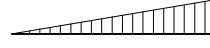


Sistemdeki kaymayı hesaplamak için bu sistemdeki iş formülünü yazalım:

$$w = w_M + w_V + w_N + w_{KT} + w_{ST} + \bar{F} \cdot F \cdot c_f$$

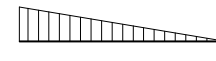
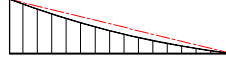
1. terim  $w_M = \int \bar{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx$  sistemin iki tarafının moment dağılımı için iki ayrı hesap yapılır.

Sistemin sol tarafı için moment dağılımı:



İntegral katsayısı  $1/3$  ;  $\bar{M} = -L$  ;  $M = -q \cdot L^2 / 2$  ve integral boyu  $L$  dir.

Sistemin sağ tarafı için moment dağılımı:



İntegral katsayısı  $1/4$  ;  $\bar{M} = -L$  ;  $M = -q \cdot L^2 / 2$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$w_M = \frac{1}{3} \cdot (-L) \cdot \left( -\frac{qL^2}{2} \right) \cdot \frac{L}{EJ} + \frac{1}{4} \cdot (-L) \cdot \left( -\frac{qL^2}{2} \right) \cdot \frac{L}{EJ}$$

$$w_M = \frac{7 \cdot q \cdot L^4}{24EJ}$$

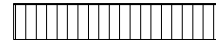
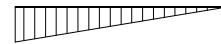
2. terim  $w_V = \int \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx$  sistemin iki tarafının çapraz kuvvet dağılımı vardır.

Sistemin sol tarafı için çapraz kuvvet dağılımı:



İntegral katsayısı  $1$  ;  $\bar{V} = -1$  ;  $V = -q \cdot L / 2$  ve integral boyu  $L$  dir.

Sistemin sağ tarafı için çapraz kuvvet dağılımı:



İntegral katsayısı  $1/2$  ;  $\bar{V} = 1$  ;  $V = q \cdot L$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$w_V = 1 \cdot (-1) \cdot \left( -\frac{qL}{2} \right) \cdot \frac{L}{GA^*} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot qL \cdot \frac{L}{GA^*}$$

$$w_V = \frac{q \cdot L^2}{GA^*}$$

3. terim  $w_N = \int \bar{N} \cdot \frac{N}{EA} \cdot dx$  sistemin yalnız dik kirişinde normal kuvvet dağılımı vardır.

Sistemin dik kirişi için normal kuvvet dağılımı:



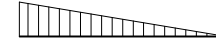
İntegral katsayısı  $1$  ;  $\bar{N} = -2$  ;  $N = -3 \cdot q \cdot L / 2$  ve integral boyu  $L$  dir.

$$w_N = 1 \cdot (-2) \cdot \left( -\frac{3qL}{2} \right) \cdot \frac{L}{EA}$$

$$w_N = \frac{3 \cdot q \cdot L^2}{EA}$$

4. terim  $w_{KT} = \int \bar{M} \cdot \alpha_T \cdot \frac{T_a - T_{\bar{u}}}{h} \cdot dx$  kesitte ısı etkisi (kavis).

Sistemin yatay kirişinde tek taraf dağılımı:



İntegral katsayısı  $1/2$  ;  $\bar{M} = -L$  ;  $T_{KT} = \frac{\alpha_T \cdot (T_a - T_{\bar{u}})}{h}$  ve integral boyu  $L$  dir.

Sistemin iki tarafındaki dağılımlar benzer olduğundan değerini 2 katı alınır:

$$w_{KT} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-L) \cdot \frac{\alpha_T \cdot (T_a - T_{\bar{u}})}{h} \cdot L$$

$$w_{KT} = -\frac{\alpha_T \cdot (T_a - T_{\bar{u}}) \cdot L^2}{h}$$

5. terim sistemde ısı etkisi (Normal kuvvet etkisi yalnız dik kirişte).

Dik kirişte dağılımlar:



İntegral katsayısı 1 ;  $\bar{M} = -2$  ;  $T_{ST} = \alpha_T \cdot \Delta T$  ve integral boyu L dir.

$$w_{ST} = 1 \cdot (-2) \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \cdot L$$

$$w_{ST} = -2 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \cdot L$$

6. terim A yatağındaki yay  $w_f = \bar{A}_V \cdot A_V \cdot c_f$ .

Değerler  $\bar{A}_V = -1$  ;  $A_V = -qL/2$  ve yay katsayısı  $c_f$  dir.

$$w_f = (-1) \cdot \left(-\frac{qL}{2}\right) \cdot c_f$$

$$w_f = \frac{qL}{2} \cdot c_f$$

Bu değerleri sayısal olarak hesaplırsak:

$$1. \text{ terim M nin sehimi} \quad w_M = \frac{7 \cdot q \cdot L^4}{24EJ} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot (6 \cdot 10^3)^4}{24 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 105,4 \cdot 10^3} \quad \underline{\underline{w_M = 34,16 \text{ mm}}}$$

$$2. \text{ terim V nin sehimi} \quad w_V = \frac{q \cdot L^2}{GA^*} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot (6 \cdot 10^3)^2}{81 \cdot 10^3 \cdot 1735} \quad \underline{\underline{w_V = 0,51 \text{ mm}}}$$

$$3. \text{ terim N nin sehimi} \quad w_N = \frac{3 \cdot q \cdot L^2}{EA} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot (6 \cdot 10^3)^2}{210 \cdot 10^3 \cdot 8680} \quad \underline{\underline{w_N = 0,12 \text{ mm}}}$$

$$4. \text{ terim KT nin sehimi} \quad w_{KT} = -\frac{\alpha_T \cdot (T_a - T_{\bar{u}}) \cdot L^2}{h} = \frac{10^{-5} \cdot (-10) \cdot (6 \cdot 10^3)^2}{250} \quad \underline{\underline{w_{KT} = 14,40 \text{ mm}}}$$

$$5. \text{ terim ST nin sehimi} \quad w_{ST} = -2 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \cdot L = -2 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10^3 \quad \underline{\underline{w_{ST} = -0,60 \text{ mm}}}$$

$$5. \text{ terim } c_f \text{ nin sehimi} \quad w_f = q \cdot L \cdot c_f / 2 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 1/2 \quad \underline{\underline{w_f = 6,0 \text{ mm}}}$$

Değerleri ana formülde yerleştirirsek toplam sehimi buluruz.

$$\begin{aligned} w &= w_M + w_V + w_N + w_{KT} + w_{ST} + w_f \\ w &= 34,16 + 0,51 + 0,12 + 14,40 - 0,60 + 6,0 = 54,59 \text{ mm} \end{aligned}$$

Buradaki değerlere bakacak olursak  $w_V$  ve  $w_N$  değerlerinin diğer değerler yanında çok küçük olduğu görülür. Bunun içinde pratikte sehim hesabında genel olarak  $w_V$  ve  $w_N$  nin değerleri dikkate alınmazlar.

$$w = 34,16 + 14,40 - 0,60 + 6,0 = 53,96 \text{ mm}$$

$$\Delta w = \frac{54,59 - 53,96}{53,96} = 0,01167$$

% 1,2 fark olduğunu gösterir. Aşağı yukarı  $\approx$  % 1 fark pratikte doğru kabul edilir.

$$\text{Teorik değer} \quad \underline{\underline{w_{Cte} = 54,59 \text{ mm}}}$$

$$\text{Pratik değer} \quad \underline{\underline{w_{Cpr} = 53,96 \text{ mm}}}$$