İlk yayın, 10 Kasım 2014

www.guven-kutay.ch

YAPI STATİĞİ

Prof. Dr. P. Marti

Virtüel İş Prensibi

44-05-1

Bu dosyayı ***44_00_Yapı Statiğine Giriş ve Özet*** dosyasıyla beraber incelerseniz daha iyi anlarsınız.

Çevirenler: ***M. Güven KUTAY, Muhammet ERDÖL***

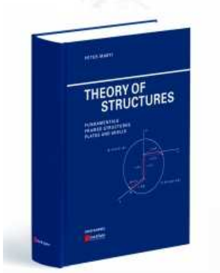
En son durum: 21 Kasım 2014

Bu dosyalarda yalnız ders notlarının tercümesi verilmiştir. Daha geniş ve detaylı bilgi almanız için ***Prof. Dr. P. Marti*** nin Statik kitabını öneririm.

Almanca-Deutsch

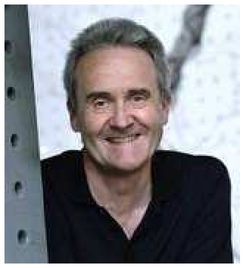
Peter Marti
Baustatik, Grundlagen-Stabtragwerke-Flächentragwerke
Ernst & Sohn, Berlin, 2012

İngilizce-English



Peter Marti
Theory of Structures, Fundamentals, Framed Structures, Plates and Shells
Ernst & Sohn, Berlin, 2012

Prof. Dr. P. Marti



Prof. Dr. sc. Peter Marti
1990 ile 2014 senelerinde Zürich ETH da İnşaat Statiği ve Konstrüksiyonu Profesörü

DİKKAT:

Bu çalışma iyi niyetle ve bugünün teknik imkanlarına göre yapılmıştır. Bu çalışmadaki bilgilerin yanlış kullanılmasından doğacak her türlü maddi ve manevi zarar için sorumluluk kullanana aittir. Bu çalışmadaki bilgileri kullananlara, kullandıkları yerdeki şartları iyi değerlendirip buradaki verilerin yeterli olup olmadığına karar vermeleri ve gerekirse daha detaylı hesap yapmaları önerilir. Eğer herhangi bir düzeltme, tamamlama veya bir arzunuz olursa, hiç çekinmeden bizimle temasa geçebilirsiniz.

Statik dosyalarında kullandığımız terimlerin Almancadan Türkçe karşılığını, ne Türk Dil Kurumunda nede normal veya elektronik sözlüklerde bulamadık. Hedefimiz Türkçe bilen ve temel bilgisi az dahi olan kütleye basit olarak bilgileri aktarmak olduğu için, kendi mantığımıza göre okuyucunun anlayacağı, basit Türkçe terimler kullandık. Ayrıca 44-00 numaralı dosyada Türkçe-Almanca(-İngilizce-Fransızca) sözlük ile Kaynakları verdik. İsteyen oradan kullanılan Türkçe terimleri bulabilir. Bilginiz ola!..

Terimlerin Türkçe karşılığı için büyük yardımı olan sayın Muhammet ERDÖL e kendim ve dosyadan faydalanacakların adına çok teşekkür ederim.

İ Ç İ N D E K İ L E R

1. Virtüel İş Prensibi

1.1. Giriş

Virtüel İş Prensibinin tanımı:

Virtüel iş prensibine göre; kuvvetler grubu sisteminde, eğer bütün hakiki ve virtüel işlerin toplamı sıfır ise, sistem dengededir.

$$\boxed{\delta A = \sum \underline{F} \cdot \delta \underline{u} = 0} \qquad \text{F 1}$$

δA	Toplam virtüel iş
$\underline{F}$	Kuvvet (Denge durumu)
$\delta \underline{u}$	Virtüel kaydırma (Hareket durumu)

İş denklemi ile her hangi bir deformasyon hesaplanabilir. Örneğin; Kayma, sehim, eğim, dönme, ve benzeri. İş denklemi Virtüel İş Prensibinin özel halidir.

Genelde virtüel iş prensibinde bir biri ile bağıntısı olmayan iki durum ele alınır. Bu iki durum Hakiki Hareket Durumu (**HHD**) ile Virtüel Yükleme Durumu (**VYD**) dur.

Prensip:

HHD: Hakiki Hareket Durumu hakikatte sistemin kesit zorlamaları eğilme momenti M, normal kuvvet N, çapraz kuvvet V, torsiyon momenti T ile oluşan şekil değiştirmelerini ve aranan sehim, eğimi ihtiva eder.

VYD: Virtüel Yükleme Durumu uygun seçilmiş virtüel (sanal) sistemin bir birim zorlamasına göre sanal birim kuvvet $\overline{Q}=1$ veya sanal eğilme momenti $\overline{M}=1$ ile aranan değerlerin, sehim, eğilme gibi, hakiki sistemdeki yerinde ve yönünde yerleştilmesidir.

Gidiş yolu:

HHD: **S**istemin kesit zorlamaları eğilme momenti M, normal kuvvet N, çapraz kuvvet V, torsiyon momenti T, ısı, içgerilmeler, yaylanmalar ile oluşan şekil değiştirmeleri; $\dfrac{N}{EA}=\varepsilon$ esneme, $\dfrac{M}{EJ}=\chi$ kavis, $\dfrac{V}{GA^*}=\gamma$ kayma, $\dfrac{T}{GK}=\dfrac{d\varphi}{dx}$ burulma, $\dfrac{\alpha_T \cdot (T_a - T_ü)}{h}$ ısı eğilmesi, $\alpha_T \cdot \Delta T$ ısı uzaması, $F \cdot c_f$ .elastik yataklama, yatak reaksiyonları ve kesit kuvvetleri belirlenmelidir.

VYD: Virtüel (sanal) sistemde $\overline{Q}=1$ ve $\overline{M}=1$ in oluşturduğu yatak reaksiyonları ve kesit kuvvetleri $\overline{M}, \overline{N}, \overline{V}, \overline{T}$ hesaplanır.

1.2. İş prensibinin ana formülü

Dengeli sistemde dış işlerin toplamıyla iç işlerin toplamı birbirine eşit olmalıdır. Dış işlerin toplamı: $\Sigma A_d = Q \cdot \delta + \sum_i \overline{R}_i \cdot r_i$ ve iç işlerin denklemine diğer bütün etkenleride, örneğin; Normal kuvvetler, Torsiyon momenti ve ısı etkilerinide analog olarak katarsak, iç işlerin toplamının formülü şu şekli alır:

$$\Sigma A_i = \int \overline{N} \cdot \frac{N}{EA} \cdot dx + \int \overline{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx + \int \overline{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx + \int \overline{T} \cdot \frac{T}{GK} \cdot dx + \int \overline{N} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \cdot dx + \int \overline{M} \cdot \alpha_T \cdot \frac{T_a - T_ü}{h} \cdot dx$$

Dengeli sistemde: $\Sigma A_d = \Sigma A_i$

Burada değerleri yerleştirirsek formülümüz şu şekli alır. Bu ***Virtüel iş prensibi ana formülü*** dür ve bu formülle kiriş veya sistemdeki sehim, kayma veya dönme büyüklükleri bulunur. Bu üç değeri $\delta \equiv w \equiv \varphi$ olarak δ ile gösterirsek:

$$\boxed{\delta_{top} = \delta_M + \delta_V + \delta_N + \delta_T + \delta_{S\Delta T} + \delta_{K\Delta T} + \delta_f} \qquad \text{F 2}$$

δ_M	Eğilme momentinden oluşan değer:	$\delta_M = \int \overline{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx$
δ_V	Çapraz kuvvetten oluşan değer:	$\delta_V = \int \overline{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx$
δ_N	Normal kuvvetten oluşan değer:	$\delta_N = \int \overline{N} \cdot \frac{N}{EA} \cdot dx$
δ_T	Torsiyon momentinden oluşan değer:	$\delta_T = \int \overline{T} \cdot \frac{T}{GK} \cdot dx$
$\delta_{S\Delta T}$	Sistemde ısı farkından oluşan değer:	$\delta_{S\Delta T} = \int \overline{N} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \cdot dx$
$\delta_{K\Delta T}$	Kesitte ısı farkından oluşan değer:	$\delta_{K\Delta T} = \int \overline{M} \cdot \alpha_T \cdot \frac{T_a - T_ü}{h} \cdot dx$
δ_f	Yaylanmadan oluşan değer:	$\delta_f = \overline{F} \cdot F \cdot c_f$

Burada verilen değerler geneldir. Detaylı bilgi Şekil 1 ile Şekil 13 arasındaki şekillerde görülür. Burada verilen değerleri F 2 formülünde yerleştirirsek ***Virtüel iş prensibi ana formülü*** F 3 bulunur.

$$\boxed{1 \cdot \delta + \sum_i \overline{R}_i \cdot r_i = \int \overline{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot dx + \int \overline{V} \cdot \frac{V}{GA^*} \cdot dx + \int \overline{N} \cdot \frac{N}{EA} \cdot dx + \int \overline{T} \cdot \frac{T}{GK} \cdot dx + \int \overline{N} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \cdot dx + \int \overline{M} \cdot \alpha_T \cdot \frac{T_a - T_ü}{h} \cdot dx + \overline{F} \cdot F \cdot c_f}$$

F 3 , İş prensibinin ana formülü

δ	$\overline{Q} = 1$; $\overline{M} = 1$ in yerinde ve yönünde aranan büyüklük (sehim, burulma),
$\overline{R}_i$	Virtüel Yükleme durumda reaksiyonlar,
r_i	Hakiki Hareket durumunda R_i nin komponentleri,
$\overline{M}, \overline{V}, \overline{N}, \overline{T}$	Virtüel Yükleme durumda kesit büyüklüklerinin değerleri,
M, V, N, T	Hakiki Hareket durumunda kesit büyüklüklerinin değerleri,
E J	Eğilme rijitliği,
T	Torsiyon momenti,
GK	Torsiyon rijitliği,
GA*	Kesme rijitliği,
α_T	Malzemenin ısıl genleşme katsayısı,
ΔT	Çevre ısısı değişikliği, $\alpha_T \,.\, \Delta T = \varepsilon_{0(\Delta T)}$,
T_a	Kesitin alt tarafındaki ısı,
$T_ü$	Kesitin üst tarafındaki ısı,
h	Kesitin yüksekliği.

Problemi kolay yoldan çözmek için, Virtüel Yükleme durumu öyle seçilmeliki, bilinmeyen r_i ve R_i nin komponentleri olmasın.

Hatırlatma:

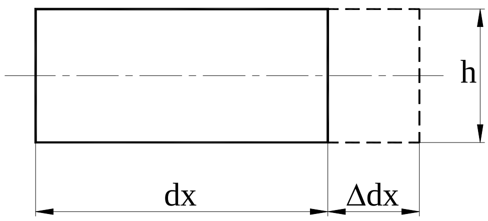
1. Yukarıda F 3 nin sol tarafında zorlamalar ve yatak reaksiyonları (dış işler), sağ tarafındada şekil değiştirme işleri (iç işler) yer alır.
2. Kirişlerde iç işler; eğilme, torsiyon, yaylanme ve ısı işleri dikkate alınır. Çapraz kuvvet ve normal kuvvetin oluşturduğu işler genelde çok küçük olduğundan dikkate alınıp hesaba katılmazlar. İstisnalar: ince dikmeli çelik profiller, sandviç profiller, kafes kirişte normal kuvvet ile küçük kesit alanlı ek praçalardır.
3. İş formülünde şekil değiştirme intergralleri genel olarak integral tablosuna göre hesaplanırlar. Bu hesaplar aşağıda detaylı olarak anlatılacaktır.

1.3. Sistemdeki elemanların şekil değiştirmeleri

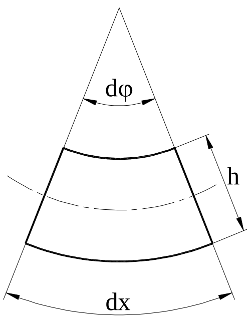
Sistemi zorlayan her kuvvet sistemdeki elemanların şekil değiştirmelerini oluşturur. Bu değişikliği incelerken şu hususları belirlememiz, hesabımızın geçerliliği bakımından faydalıdır.

- Malzeme: homojen ve izotrop
- Malzemenin özelliği: doğrusal elastik (Hooke)
  $\sigma = \varepsilon \cdot E$
  $\tau = \gamma \cdot G$
- Kesit daima düzlem olarak kalıcı (Bernoulli):
  Gerilme entegrasyonu→Kesit kuvveti

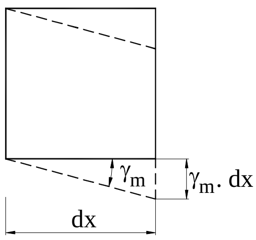
Çubuklarda şekil değişikliği:



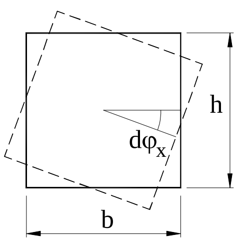
Şekil 1, Esneme $\dfrac{\Delta dx}{dx} = \dfrac{N}{EA} + \alpha_T \cdot \Delta T$



Şekil 2, Kavis $\dfrac{d\varphi}{dx} = \chi = \dfrac{M}{EJ} + \alpha_T \cdot \dfrac{T_a - T_{ü}}{h}$

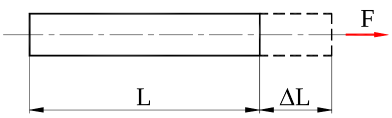


Şekil 3, Kayma $\dfrac{\gamma_m \cdot dx}{dx} = \dfrac{V}{GA^*}$



Kesit

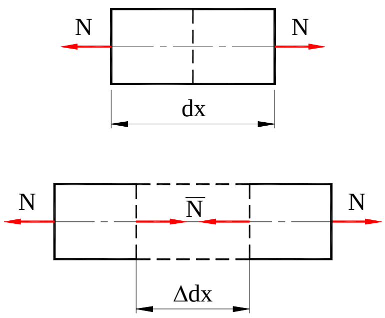
Şekil 4, Dönme $\dfrac{d\varphi_x}{dx} = \dfrac{T}{GK}$



Çubuk

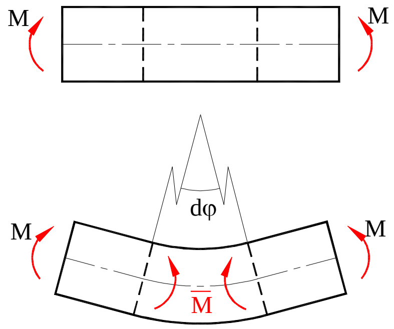
Şekil 5, Uzama $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{F}{EA} + \alpha_T \cdot \Delta T$

Çubuklarda iç işler:



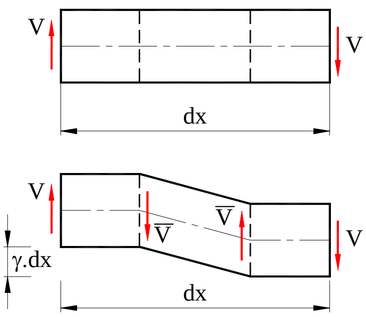
$$dW_{iç} = -\overline{N} \cdot \Delta dx$$

Şekil 6, Normal kuvvet



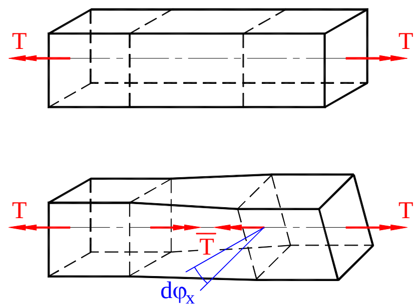
$$dW_{iç} = -\overline{M} \cdot d\varphi$$

Şekil 7, Eğilme momenti



$$dW_{iç} = -\overline{V} \cdot \gamma_m \cdot dx$$

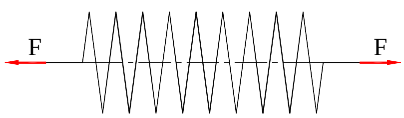
Şekil 8, Çapraz kuvvet



$$dW_{iç} = -\overline{T} \cdot d\varphi_x$$

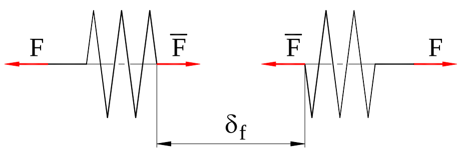
Şekil 9, Torsiyon momenti

Yaylarda iç işler:



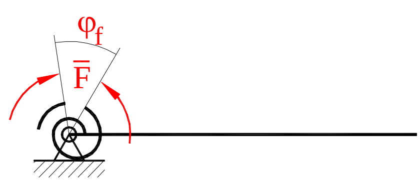
Şekil 10, $\delta_f = F \cdot c_f$

Şekil 11, $\varphi_f = F \cdot c_f$



Şekil 12, $W_{iç} = -\overline{F} \cdot \delta_f = -\overline{F} \cdot F \cdot c_f$

Çekme ve Basma yayı

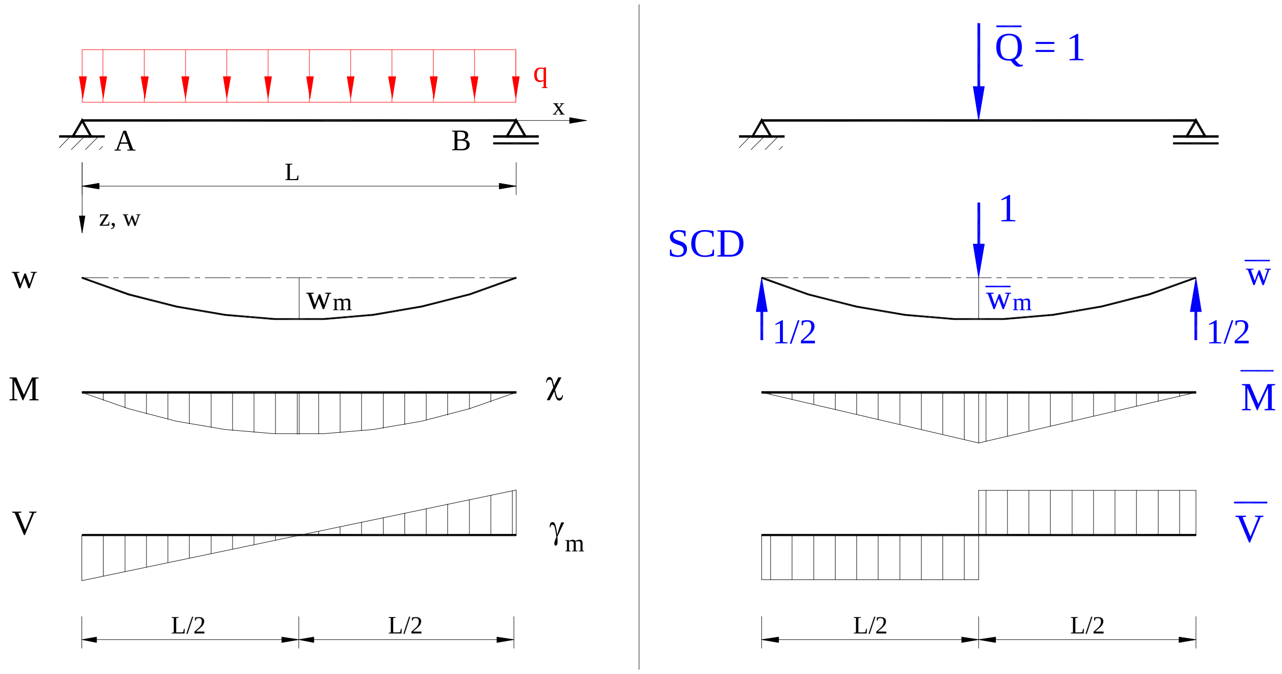


Şekil 13, $W_{iç} = -\overline{F} \cdot \varphi_f = -\overline{F} \cdot F \cdot c_f$

Spiral yay

Bu işlemleri basitce anlatmak için eğilme ve kesme rijitliği sabit olan (EI=sabit ; GA*=sabit), eşit yayılı yükle zorlanan, basit kirişi ele alalım Şekil 14, ve bu kirişte eğilme büyüklüğünü bulalım.

Hakiki Hareket Durumu **HHD** | Virtüel Yükleme Durumu **VYD**



Şekil 14, Basit kirişte Hakiki Hareket ve virtüel durumu

Virtüel kuvvet bilinmediğinden ***Bilinmeyen Değer (BD)*** olarak adlandırır ve ***birim büyüklüğü "1"*** ile gösteririz. Şekil 14 ile görülen büyüklüklerin değerleri aşağıda verilmiştir:

	Hakiki Hareket Durumu **HHD**			Virtüel Yükleme Durumu **VYD**	
Maksimum moment	$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8}$		F 4	$\overline{M}_{max} = -\frac{L}{4}$	$\overline{M} = -\frac{L}{4}$
Maksimum Kavis χ	$\chi = \frac{M}{E \cdot J}$	$\chi_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot J}$	F 5		
Maksimum kesme kuvveti	$V_{max} = -\frac{q \cdot L}{2}$		F 6	$\overline{V}_{max} = -\frac{1}{2}$	$\overline{V} = -\frac{1}{2}$
Maksimum Kayma	$\gamma_m = \frac{V}{GA^*}$	$\gamma_m = \frac{q \cdot L}{2GA^*}$	F 7		

1.4. İş denklemi

Virtüel iş prensibine göre sistemin dengede olması için, bütün hakiki ve virtüel işlerin toplamı sıfır olmalıdır.

$$\overline{A}_{Sa} + A_{\overline{M}} + A_{\overline{V}} = 0$$

$$\boxed{\overline{A}_{Sa} = -A_{\overline{M}} - A_{\overline{V}}} \qquad \text{F 8}$$

$\overline{A}_{Sa}$	Toplam virtüel iş
$A_{\overline{M}}$	Eğilme momentinden oluşan iş
$A_{\overline{V}}$	Kesme kuvvetinden oluşan iş

Sırasıyla F 8 ile görülen işleri hesaplayalım:

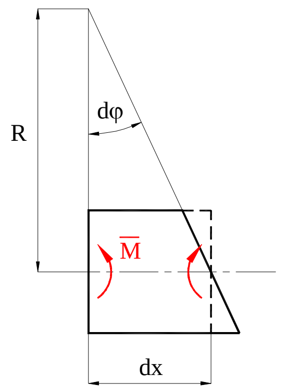
1.4.1. Toplam virtüel iş

Toplam virtüel iş Şekil 14 Virtüel Yükleme durumunda basit olarak görülür: $\overline{A}_{Sa} = \overline{Q} \cdot w_m$ Burada kuvvet birim kuvveti $\overline{Q} = 1$ olduğu için, toplam virtüel iş ***kuvvet x yol*** olarak pozitif değerli olur.

$$\boxed{\overline{A}_{Sa} = 1 \cdot w_m} \qquad \text{F 9}$$

$\overline{A}_{Sa}$	Toplam virtüel iş
w_m	Kiriş ortasındaki maksimum sehim

1.4.2. Eğilme momentinden oluşan iş



Şekil 15, Basit kirişte eğilmeden oluşan iş

Basit kirişin çok küçük parçasını ele alıp eğilmesini inceliyelim. Şekil 15 ile görüldüğü gibi parçanın dengede olması için iç zorlamada eksi değerli bir momentin olması gerekir. Hesaplayacağımız büyüklükler şöyledir:

Eğilme radyusu ile kavis ters orantılıdır. $R = \dfrac{1}{\chi}$

$\tan d\varphi = \dfrac{dx}{R}$ burada açı çok küçük olduğundan $d\varphi = \dfrac{dx}{R}$

kabul edilir ve radyus R kavis $1/\chi$ olarak ifade edilir:

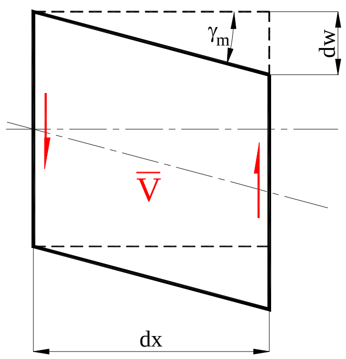
$$\boxed{d\varphi = \chi \cdot dx}$$

$dA_{\overline{M}} = -\overline{M} \cdot d\varphi$ denkleminde $d\varphi$ değerini yerleştirirsek $dA_{\overline{M}} = -\overline{M} \cdot \chi \cdot dx$ bulunur. Burada kavis χ nin değerini $\left(\chi = \dfrac{M}{E \cdot J}\right)$ olarak yerleştirir ve integralini alırsak eğilme momentinden oluşan iş denklemini buluruz

$$\boxed{dA_{\overline{M}} = -\int_0^L \overline{M} \cdot \frac{M}{E \cdot J} \cdot dx} \qquad \text{F 10}$$

$dA_{\overline{M}}$	Eğilme momentinden oluşan iş
$\overline{M}$	Virtüel Moment (Şekil 14 ve Şekil 15)
M	Hakiki moment
E J	Eğilme rijitliği

1.4.3. Kesme kuvvetinden oluşan iş



Şekil 16, Basit kirişte Kesme kuvvetinin işi

Basit kirişin çok küçük parçasını ele alıp kesme kuvvetinden oluşan kaymayı inceliyelim. Şekil 16 ile görüldüğü gibi parçanın dengede olması için karşı istikamette zorlayan negatif değerli kesme kuvvetleri kabul edilir.

Hesaplayacağımız büyüklükler şöyledir:

Sehim: $dw \approx \gamma_m \cdot dx$

burada kayma γ_m F 7 yerleştirirsek:

sehim $dw = \dfrac{V}{G \cdot A^*} \cdot dx$ bulunur.

Kesme kuvvetinden oluşan iş $\boxed{dA_{\overline{V}} = -\overline{V} \cdot \gamma_m \cdot dx}$ burada kayma γ_m F 7 yerleştirilir ve integrali alınırsa:

$$\boxed{dA_{\overline{V}} = -\int_0^L \overline{V} \cdot \frac{V}{G \cdot A^*} \cdot dx} \qquad \text{F 11}$$

$dA_{\overline{V}}$ Eğilme momentinden oluşan iş
$\overline{V}$ Virtüel Kesme kuvveti (Şekil 14 ve Şekil 16)
V Hakiki Kesme kuvveti
GA* Kesme rijitliği

Bulduğumuz bu değerleri F 8 formülünde yerleştirirsek:

$$\boxed{w_m = \int_0^L \overline{M} \cdot \frac{M}{E \cdot J} \cdot dx + \int_0^L \overline{V} \cdot \frac{V}{G \cdot A^*} \cdot dx} \qquad \text{F 12}$$

w_m Kiriş ortasındaki sehim (Q=1 olduğundan yalnız w_m yazılmıştır.)
$\overline{M}$ Virtüel Moment (Şekil 14 ve Şekil 16)
M Hakiki moment
E J Eğilme rijitliği
$\overline{V}$ Virtüel kesme kuvveti (Şekil 14 ve Şekil 16)
V Hakiki kesme kuvveti
G Kesme modülü
A* Kesitin etkin kesme alanı

Örnek olarak yukarıda Şekil 17 ile verilen kirişteki orta yerindeki sehiminin virtüel iş prensibiyle numerik olarak formül F 12 ile hesaplanmasını yapalım.

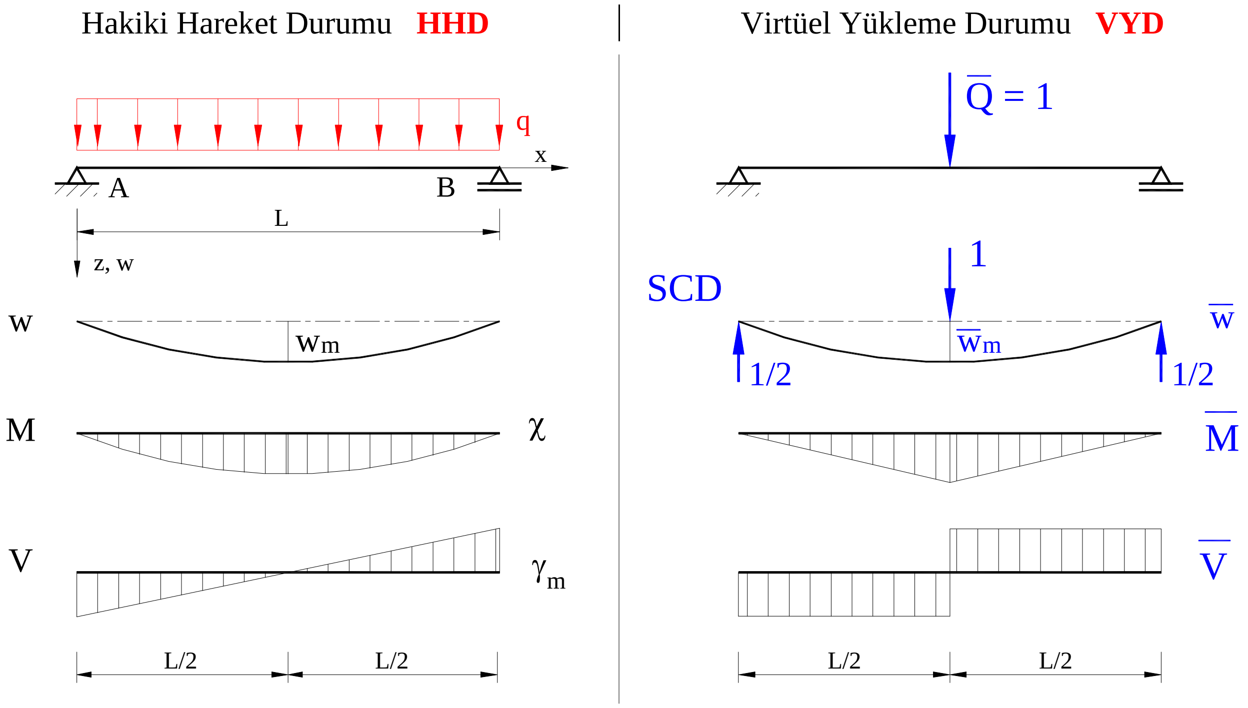
F 12 formülündeki büyüklüklerin değerleri yukarıda bulunmuştur. Bu değerleri yerleştirip integrallerini alınca sonucu elde ederiz.

Pratikte bu integral hesapları tablolarla yapılır. Bu integral tablosunun en mükemmeli Prof. Dr. P. Marti' nindir ve bu tabloyu internetten indirebilirsiniz. Bunun için şu yolu izleyiniz:

www.ibk.ethz.ch/ma/education/bachelor/Baustatik *Linkine girip* Vorlesungsunterlagen Baustatik *grubunda* • Integrationstabelle yi tıklayın**.** Bu tablo İntegral tablosu olarak sitede de verilmiştir.

Tabloyu elinize aldınızsa hesap şu şekilde yapılır:

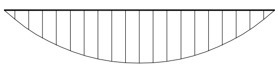
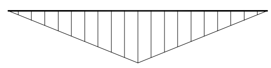
1.5. Örneğin Sehim hesabı,



Şekil 17, Basit kirişte Hakiki Hareket ve Virtüel Yükleme duru

1.5.1. Eğilme momentinden oluşan sehim

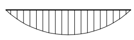
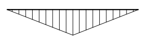
$$w_{mM} = \int_0^L M \cdot \overline{M} \cdot \frac{1}{E \cdot J} \cdot dx$$

Değeri, F 4	Dağılım şekli	Değeri, F 4	Dağılım şekli
$M = \frac{q \cdot L^2}{8}$		$\overline{M} = -\frac{L}{4}$	

İntegral tablosundan bulunan integral değerinde mM şekilleri ifade ediyor burada değer mM siz alınır. $\frac{5}{12}\,mM$ $\qquad \frac{5}{12}$

Değerleri formülde yerleştirelim

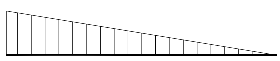
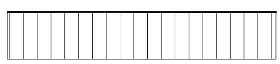
$$w_{mM} = \int_0^L M \cdot \overline{M} \cdot \frac{1}{E \cdot J} \cdot dx \quad = \frac{5}{12} \quad \cdot \frac{q \cdot L^2}{8} \quad \cdot \left(-\frac{L}{4}\right) \quad \frac{L}{E \cdot J} \quad \Rightarrow \quad w_{mM} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J}$$

İntegral tablosundan ↑←  

1.5.2. Kesme kuvvetinden oluşan sehim

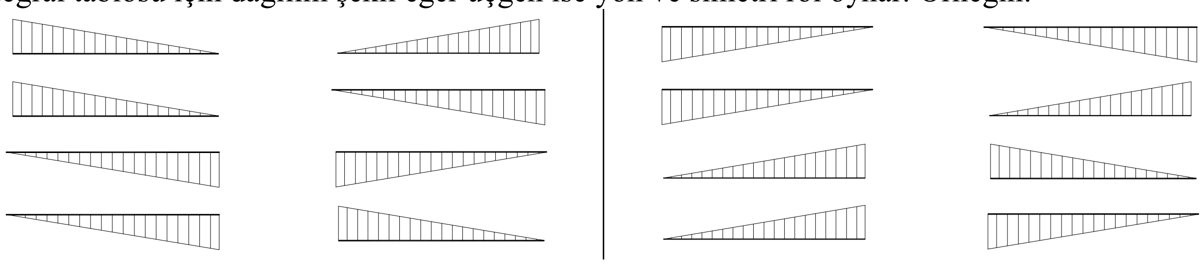
Kesme kuvvetinden oluşan sehimi bulmak için, zorlama simetrik olduğundan, kirişin orta noktasına kadar hesaplayıp iki katını alırız.

$$w_{mV} = 2 \cdot \int_0^{L/2} \overline{V} \cdot \frac{V}{G \cdot A^*} \cdot dx$$

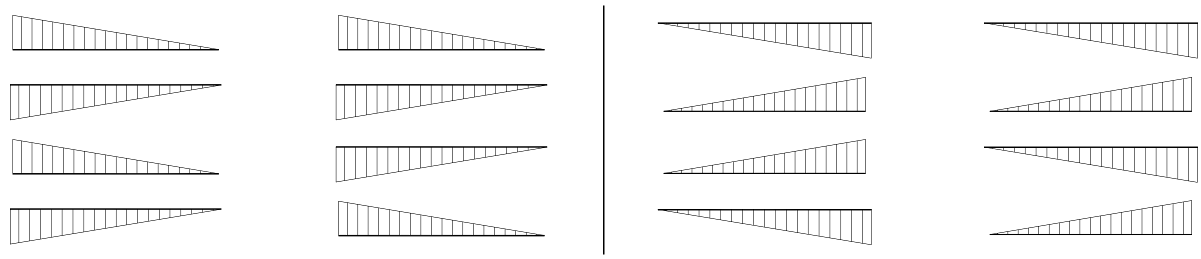
Değeri, F 6	Dağılım şekli	Değeri, F 6	Dağılım şekli
$V_{max} = -\frac{q \cdot L}{2}$		$\overline{V}_{max} = -\frac{1}{2}$	

İntegral tablosundan bulunan integral değerinde mM şekilleri ifade ediyor burada değer mM siz alınır $\frac{1}{2}\,mM$ $\qquad \frac{1}{2}$

İntegral tablosu için dağılım şekli eğer üçgen ise yön ve simetri rol oynar. Örneğin:



Burada üçgenlerin simetrik olması önemlidir ve faktör daima 1/6 dır.

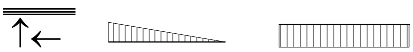


Burada üçgenlerin aynı yönde olması önemlidir ve faktör daima 1/3 dür.

Değerleri formülde yerleştirelim

$$w_{mV} = 2\int_0^{L/2} V \cdot \overline{V} \cdot \frac{1}{GA^*} \cdot dx = 2 \quad \frac{1}{2} \quad \left(-\frac{q \cdot L}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{L}{2GA^*} \Rightarrow \boxed{w_{mV} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot G \cdot A^*}}$$

İntegral tablosundan $\uparrow\leftarrow$



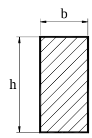
1.5.3. Pratikte sehim formülü

Pratikte w_{mV}/w_{mM} değeri, istina olarak çok ince dikmeli I-profilleri veya yumuşak çekirdekli sandviç kontrüksiyonlar dışında çoğu zaman çok küçük olduğundan kesme kuvvetlerinden oluşan deformasyonlar dikkate alınmaz ve sehim yalnız eğilme momenti ile hesaplanır. Bunu kanıtlamak için w_{mV}/w_{mM} orantısını hesaplayalım:

$$\frac{w_{mV}}{w_{mM}} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot G \cdot A^*} \cdot \frac{384 \cdot E \cdot J}{5 \cdot q \cdot L^4}$$

Burada kesme modülünün elastiklik modülü ile bağıntısı $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$

Eylemsizlik momenti (Dikdörtgen için) $J = \frac{b \cdot h^3}{12}$



Etkin kesme alanı (Dikdörtgen için) $A^* = \frac{5}{6} \cdot b \cdot h$

Bu değerleri yukarıdaki formüle yerleştirirsek:

$$\frac{w_{mV}}{w_{mM}} = \frac{19{,}2 \cdot (1+\nu) \cdot J}{A^* \cdot L^2} = 1{,}92 \cdot (1+\nu) \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

Burada poisson sayısını çelik için $\nu = 0{,}3$; dikdörtgen kesitli profilin kiriş boyuna oranını L/h=10 kabul edersek w_{mV}/w_{mM} orantısı:

$$\frac{w_{mV}}{w_{mM}} = 1{,}92 \cdot (1+0{,}3) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$w_{mV}/w_{mM} \approx 2{,}5\ \%$ bulunur.

Buda pratikte önemli rol oynamayacak kadar küçüktür.

1.6. Maxwell kanunu

Şekil 18 ile görülen basit kirişin k noktasında bir birim kuvvetinin ($Q_k = 1$) zorlamasıyla i noktasındaki sehimi δ_{ik} iş denklemi F 13 ile gösterilmiştir.

$$\delta_{ik} = \int M_i \cdot \frac{M_k}{EJ} \cdot dx + \ldots \qquad \text{F 13}$$

δ_{ik}	Q_k kuvvetinin etkisiyle i yerinde oluşan sehim
M_i	i yerindeki moment
M_k	k yerindeki moment
E J	Eğilme rijitliği

Burada rolleri değiştirirsek; Şekil 19 ile görülen basit kirişin i noktasında bir birim kuvvetinin ($Q_i = 1$) zorlamasıyla k noktasındaki sehimi δ_{ki} iş denklemi F 14 ile görülen hali alır.

$$\delta_{ki} = \int M_k \cdot \frac{M_i}{EJ} \cdot dx + \ldots \qquad \text{F 14}$$

δ_{ki}	Q_i kuvvetinin etkisiyle k yerinde oluşan sehim
M_k	k yerindeki moment
M_i	i yerindeki moment
E J	Eğilme rijitliği

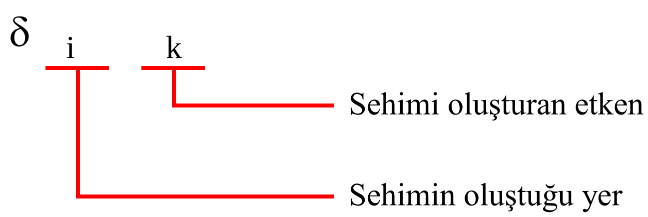
Burada F 13 ve F 14 ün sağ tarafları biribirlerine eşittir. Öyleyse:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \qquad \text{F 15}$$

δ_{ik}	Q_k kuvvetinin etkisiyle i yerinde oluşan sehim
δ_{ki}	Q_i kuvvetinin etkisiyle k yerinde oluşan sehim

Bu *J.G.* ***Maxwell*** (1831-1879) kanunu olarak bilinir.

Burada kısaca indeksin Şekil 18 ile tarifini yapmak için sehim δ_{ik} yı ele alalım:



Maxwell kanununun tanımı:

Bir kirişin k noktasında bir birim kuvveti ($Q_k = 1$) zorlamasıyla i noktasındaki sehimi δ_{ik} , aynı kirişin i noktasında bir birim kuvveti ($Q_i = 1$) zorlamasıyla k noktasında oluşan sehimine δ_{ki} eşittir.

Bu tanımı formülle gösteririz:

$$\delta_i = \sum_k Q_k \cdot \delta_{ki} \qquad \text{F 16}$$

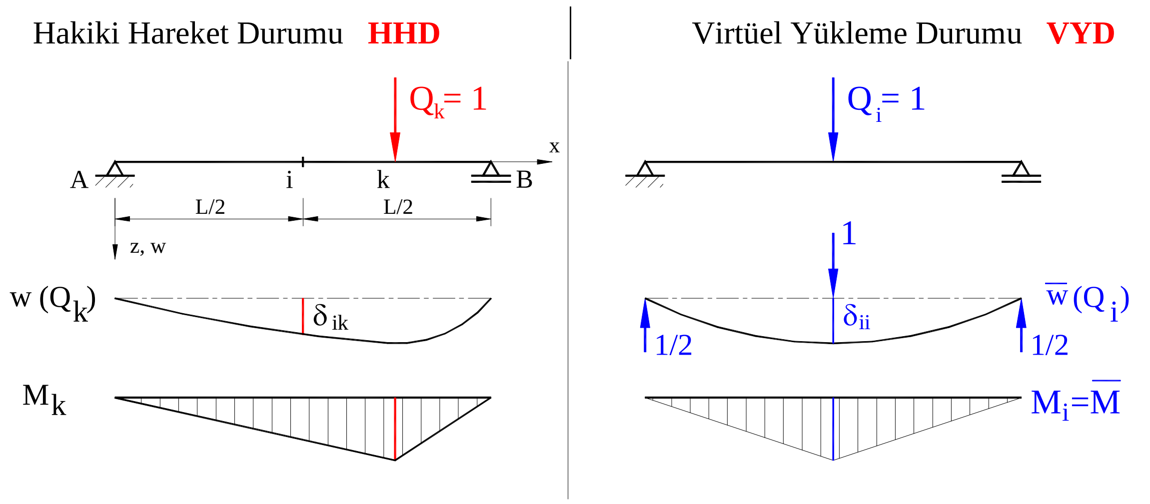
δ_i	i noktasındaki sehim
Q_k	k noktasındaki kuvvet
δ_{ki}	k noktasında i kuvvetinden oluşan sehim

1.6.1. Maxwell kanununa örnekler

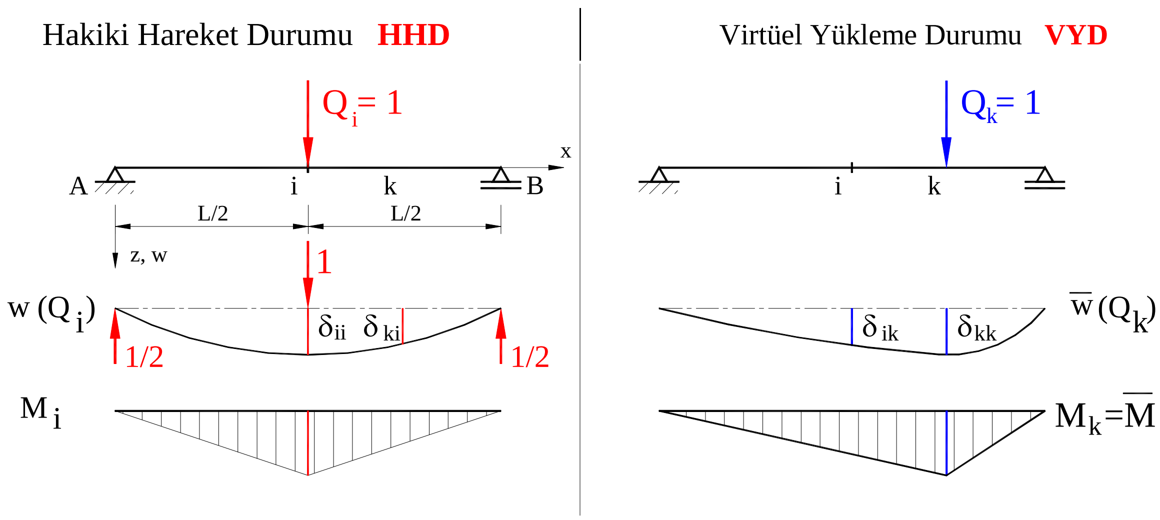
Maxwell kanununu bir örnekle göstermek istersek basit kirişimizi ele alalım ve orta noktasını i ve herhangi bir noktasınıda k olarak kabul edelim. Aynı zamanda kiriş kesitinin kiriş boyunca sabit ve eğilme rijitliği "EJ = sabit" ile kesme kuvvetinden oluşan sehim "$GA^* \rightarrow \infty$ " sıfır kabul edilirse.

Örnek 1

Kirişin herhangi bir yerindeki sehimini bulmak için, simetriden dolayı $0 \le x \le L/2$ kabul edelim ve hesabımızı ilk önce birim değerleriyle yapalım.



Şekil 18, Maxwell kanunu



Şekil 19, Maxwell kanunu

Burada Qk = Qi = 1 olduğundan, daha önceki dosyalara göre:

$$\delta_{ki} = \frac{3 \cdot L^2 \cdot x}{48 \cdot E \cdot J}$$

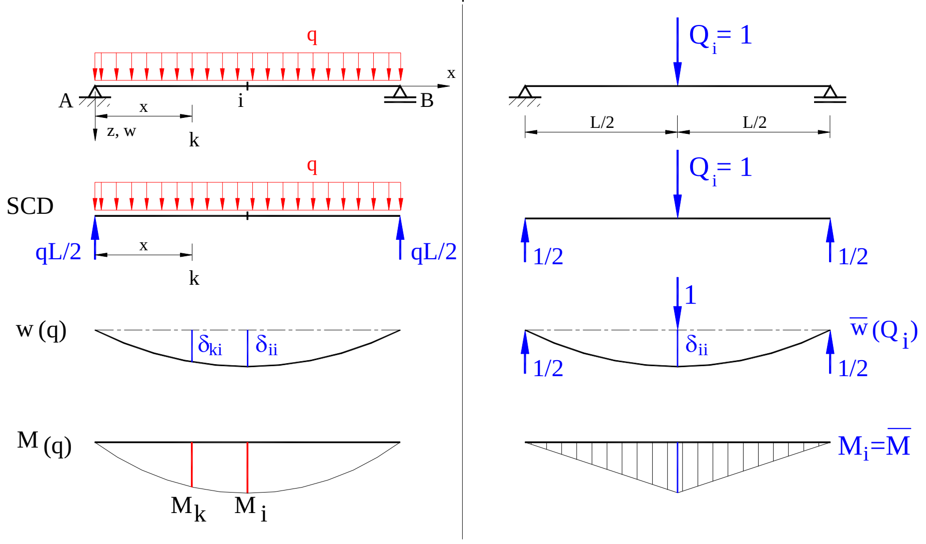
Kiriş üzerinde eşit yayılı yük q için sehim çizgisi;

$$\delta_i = 2 \cdot \int_0^{L/2} \frac{\left(3 \cdot L^2 \cdot x - 4 \cdot x^3\right) \cdot q \cdot dx}{48 \cdot E \cdot J} \qquad \delta_i = \frac{2 \cdot q}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{3 \cdot L^2}{2} \cdot \frac{L^2}{4} - \frac{4}{4} \cdot \frac{L^4}{16} \right) \qquad \underline{\underline{\delta_i = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J}}}$$

Örnek 2

Kirişin herhangi bir yerindeki sehimini bulmak için, simetriden dolayı $0 \le x \le L/2$ kabul edelim ve hesabımızı ilk önce birim değerleriyle yapalım.

Hakiki Hareket Durumu **HHD** | Virtüel Yükleme Durumu **VYD**



Şekil 20, Maxwell kanunu

HHD de x mesafesinde k noktasındaki q dan oluşan moment: $M_{k(q)} = \frac{qL}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2}$

q yu birşm kuvveti olarak kabul edersek $q = 1$ kN/m

$$\boxed{M_{k(q)} = \frac{1}{2} \cdot \left(Lx - x^2\right)}$$

VYD de aynı x mesafesinde k noktasındaki Q dan oluşan moment: $\boxed{\overline{M}_{k(Q)} = \frac{1}{2} \cdot x}$

Virtüel iş prensibine göre sistemin dengede olması için, bütün hakiki ve virtüel işlerin toplamı sıfır olmalıdır. Burada aranan sehim ve sistem simetrik olduğu için:

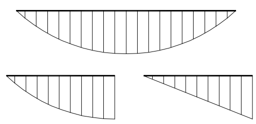
$$w_{ki} = \delta_{ki} = \int_0^{L/2} M_x \cdot \frac{\overline{M}_x}{EJ} \cdot dx$$

olarak yazabiliriz. Burada moment değerlerini yerleştirelim.

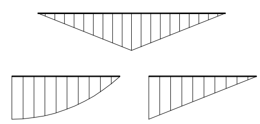
$$\delta_{ki} = \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \cdot \left(Lx - x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{EJ} \cdot dx$$

$$\delta_{ki} = \int_0^{L/2} \frac{1}{4EJ} \cdot \left(Lx^3 - x^3\right) \cdot dx$$

Dağılım şekli



Dağılım şekli



İntegral tablosundan bulunan integral değerinde mM şekilleri ifade ediyor burada değer mM siz alınır $\frac{5}{12}$ mM $\qquad \frac{5}{12}$

$$\delta_{ki} = \int_0^{L/2} \frac{1}{4EJ} \cdot \left(Lx^3 - x^3\right) \cdot dx \quad = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4EJ} \quad \cdot \left(3Lx^3 - 4x^4\right) \quad \Rightarrow \quad \delta_{ki} = \frac{5 \cdot \left(3Lx^3 - 4x^4\right)}{48EJ}$$

Formül F 16 i ele alıp değerleri x = L/2 ve $Q_k = q$ olarak yerleştirirsek:

$$\delta_i = \sum_k Q_k \cdot \delta_{ki}$$

$$w = \delta_i = \frac{5 \cdot \left(3Lx^3 - 4x^4\right)}{48EJ} \cdot q$$

$$w = \delta_i = \frac{5q}{48EJ} \cdot \left(3Lx^3 - 4x^4\right)$$

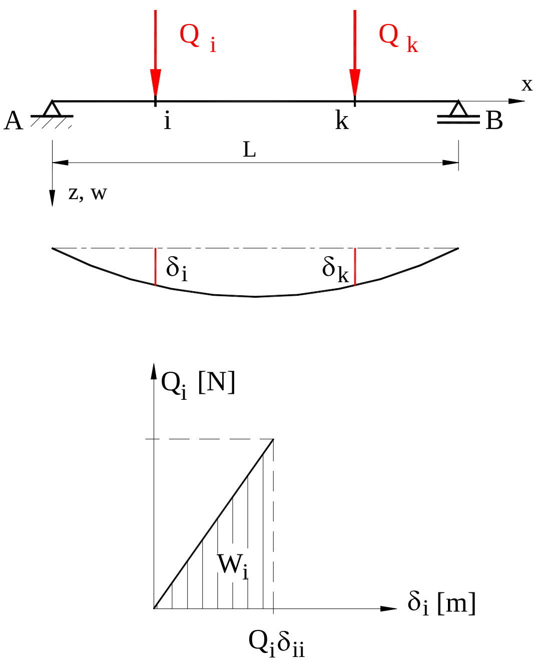
$$w = \delta_i = \frac{5q}{48EJ} \cdot \left(3L\frac{L^3}{8} - 4\frac{L^4}{16}\right)$$

$$\boxed{w_m = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J}} \qquad \text{F 17}$$

w_m	m	Kiriş ortasındaki sehim
q	N/m	Kirişteki yayılı yük
L	m	Kirişin boyu
E	N/m^2	Kiriş malzemesinin elastiklik modülü
J	m^4	Kiriş kesitinin atalet momenti

1.7. Betti ve 1. Castigliano kanunu

Şekil 21 ile görülen basit kirişin önce yalnız Q_i kuvveti ile yüklendiğini kabul edelim.



Şekil 21, Basit kiriş

Burada Q_i kuvvetinin yaptığı iş;

$$W_i = \frac{\delta_{ii}}{2} \cdot Q_i^2$$

Daha sonra Q_i kuvvetini sabit tutarak Q_k ile kirişi yükleyelim.

Q_k kuvvetinin işi $\qquad W_k = \dfrac{\delta_{kk}}{2} \cdot Q_k^2$

Sabit Q_i ve Q_k nın işi $\qquad W_{ik} = \delta_{ik} \cdot Q_i \cdot Q_k$

Toplam iş olarak:

$$W = \frac{\delta_{ii}}{2} \cdot Q_i^2 + \delta_{ik} \cdot Q_i \cdot Q_k + \frac{\delta_{kk}}{2} \cdot Q_k^2$$

Burada işlemin sırasını değiştirirsek; önce Q_k ve sonra Q_i , formülümüz şu şekli alır:

$$W = \frac{\delta_{kk}}{2} \cdot Q_k^2 + \delta_{ki} \cdot Q_k \cdot Q_i + \frac{\delta_{ii}}{2} \cdot Q_i^2$$

Burada her iki zorlamanın işi eşit olduğuna göre:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

olur. Aynı zamanda ilave işlerinde eşitliği $\delta_{ik} \cdot Q_i \cdot Q_k = \delta_{ki} \cdot Q_k \cdot Q_i$ görülür. Bu ispatlamaya ***Maxwell'in karşılıklı ilişki teorisi***dir (reziprozitätstheorem) ve buna aynı zamanda ***Betti*** konunuda denir, (Betti 1823-1892, İtalyan).

İş denklemi W nin homojen ikinci dereceden denkleminin Q_i ve Q_k ya göre türevini alırsak

$$\frac{\partial W}{\partial Q_i} = \delta_{ii} \cdot Q_i + \delta_{ik} \cdot Q_k = \delta_i$$

analog

$$\frac{\partial W}{\partial Q_k} = \delta_{ki} \cdot Q_i + \delta_{kk} \cdot Q_k = \delta_k$$

Kuvvetin etkilediği noktada, kuvvetin yönünde şekil değiştirme işinin, kuvvete göre kısmi türevi sehimi verir, F 18. Buna ***Catigliano*** nun birinci teoremi denir (Catigliano 1847-1884, İtalyan).

Catigliano nun birinci teoremi $$\boxed{\delta_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}}$$ F 18

δ_i	m	Sehim, kayma
∂W	Nm	İş
∂Q_i	N	Yük, kuvvet

Şekil değiştirme işi W, sehimin fonksiyonu vede $\delta_i = \Delta\delta_i$ olarak ifade edilirse, şu formül bulunur:

$$\Delta W = Q_i \cdot \Delta\delta_i = \frac{\partial W}{\partial \delta_i} \cdot \Delta\delta_i$$

Bu formüldende ***Catigliano*** nun ikinci teoremi bulunur, F 19 :

Catigliano nun ikinci teoremi $$\boxed{Q_i = \frac{\partial W}{\partial \delta_i}}$$ F 19

Q_i	N	Yük, kuvvet
∂W	Nm	İş
δ_i	m	Sehim, kayma

Catigliano nun teoremleri elastik olmayan durumlar içinde genel olarak geçerlidir.

Catigliano nun teoremleri plastiklik teoreminde;

Akma kanunu $$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}}}$$ F 20

Gerilme oranı $$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}}$$ F 21

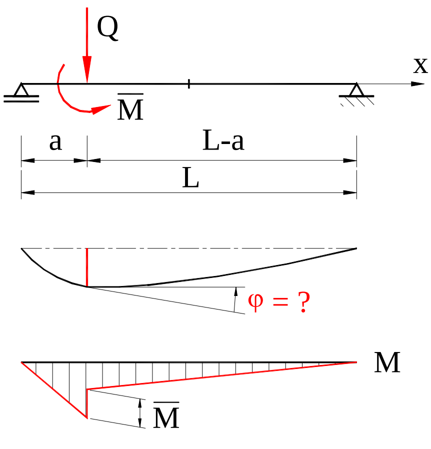
ε_{ij}	Uzama
Y	Akma fonksiyonu
σ_{ij}	Gerilim
D	Isı enerjisine geçme fonksiyonu

için geçerlidir.

1.7.1. Catigliano' nun birinci teoremininin uygulanması

Catigliano' nun birinci teoremi sehim ve eğimlerin bulunmasında kullanılır. Fakat iş denklemi ile sehim ve eğimler daha çabuk ve daha basit olarak bulunur ve hesaplanır.

Basit kirişte eğimin Catigliano' nun birinci teoremi ile hesabı:



Şekil 22, Basit kirişte eğim φ

$\overline{M}$ değeri aranan eğim açısı "φ" nin istikametinde ve yerinde seçilir. Burada bildiğimiz eşitlikleri kuralım:

$$0 \le x \le a \quad \text{için} \qquad M = Q\cdot\left(1-\frac{a}{L}\right)\cdot x + \overline{M}\cdot\frac{x}{L}$$

$$a \le x \le L \quad \text{için} \qquad M = Q\cdot a\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right) - \overline{M}\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$W = \int_0^L \frac{M^2}{2\cdot E\cdot J}\cdot dx$$

$$\varphi = \lim_{\overline{M}\to 0} \frac{\partial W}{\partial \overline{M}}$$

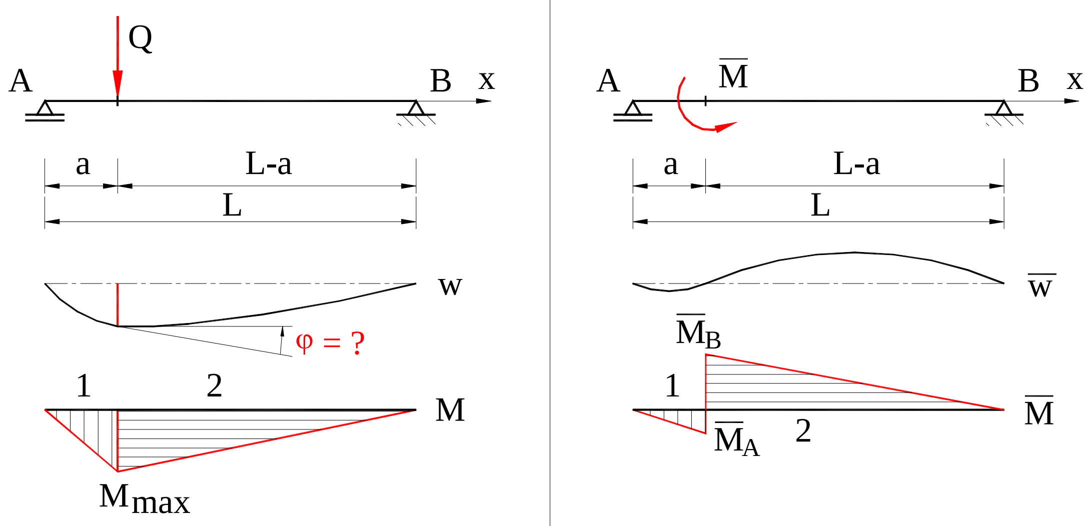
$$\varphi = \lim_{n\to 0} \frac{1}{E.J}\cdot\left\{\int_0^a\left[Q\cdot\left(1-\frac{a}{L}\right)\cdot x+\overline{n}\cdot\frac{x}{L}\right]\cdot\frac{x}{L}\cdot dx-\int_a^L\left[Q\cdot a\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right)+\overline{n}\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right)\cdot dx\right\}$$

$$\varphi = \frac{1}{E\cdot J}\cdot\left[\int_0^a Q\cdot\left(1-\frac{a}{L}\right)\cdot\frac{x^2}{L}\cdot dx-\int_a^L Q\cdot a\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\cdot dx\right]$$

$$\boxed{\varphi = \frac{Q\cdot a\cdot(L-a)\cdot(2a-L)}{3\cdot E\cdot J\cdot L}}$$

Basit kirişte eğimin iş denklemi ile hesabı:

Hakiki Hareket Durumu **HHD** | Virtüel Yükleme Durumu **VYD**



Şekil 23, Basit kirişte eğimin iş denklemi ile hesabı

Hakiki Hareket Durumunda sehim ve moment dağılımı çizilir. Virtüel Yükleme Durumunda $\overline{M}=1$ değeri aranan eğim açısı "φ" nin istikametinde ve yerinde seçilir ve sehim ile moment dağılımı çizilir. İş denklemiyle sehimin bulunması detaya inmeden şu şekilde yapılır:

Hakiki Hareket Durumunda değerleri yazalım:

HHD de a mesafesinde Q dan oluşan moment: $M_{max} = Q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right)$

Virtüel Yükleme Durumunda değerler:
VYD de

VYD de aynı a mesafesinde $\overline{M} = 1$ den oluşan moment: $\overline{M}_A = \frac{a}{L}$

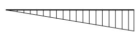
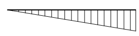
$$\overline{M}_B = \frac{a}{L} - 1$$

Virtüel iş prensibine göre sistemin dengede olması için, bütün hakiki ve virtüel işlerin toplamı sıfır olmalıdır. Burada aranan sehim için:

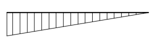
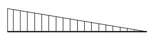
$$w_{max} = \int_0^a M_{max} \cdot \frac{\overline{M}_A}{EJ} \cdot dx + \int_a^L M_{max} \cdot \frac{\overline{M}_B}{EJ} \cdot dx$$

olarak yazabiliriz. Burada moment değerlerini integral tablosundan bulunan integral değerleriyle yerleştirelim.

$$\int_0^a M_{max} \cdot \frac{\overline{M}_A}{EJ} \cdot dx \qquad = \frac{1}{3} \qquad Q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot \qquad \frac{a}{L} \qquad \cdot \frac{a}{EJ}$$

İntegral tablosundan ↑ ←  

$$\int_a^L M_{max} \cdot \frac{\overline{M}_B}{EJ} \cdot dx \qquad = \frac{1}{3} \qquad Q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot \qquad \left(\frac{a}{L} - 1\right) \qquad \cdot \frac{(L-a)}{EJ}$$

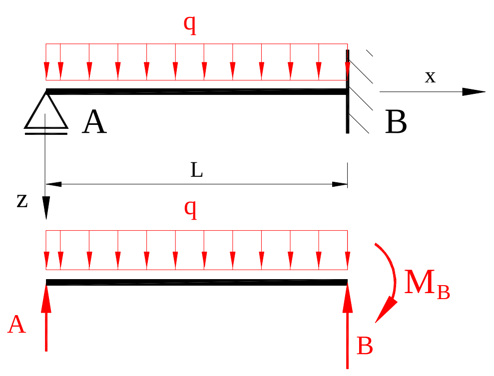
İntegral tablosundan ↑ ←  

$$w_{max} = \frac{Q \cdot a \cdot (L-a)}{3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[\frac{a^2}{L^2} - \left(1 - \frac{a}{L}\right)^2\right]$$

$$\boxed{w_{max} = \frac{Q \cdot a \cdot (L-a) \cdot (2a - L)}{3 \cdot E \cdot J \cdot L}}$$

Sonuçlar iki metodda aynı çıkmıştır.

Catigliano' nun birinci teoremi statik belirsiz sistemlerdede geçerlidir. Örnek olarak:



Şekil 24, Statik belirsiz kiriş

Herhangi bir x noktasında moment:

$$M = A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2EJ} \int_0^L \left(A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}\right)^2 \cdot dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{1}{EJ} \int_0^L \left(A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}\right)^2 \cdot x \cdot dx = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{EJ} \cdot \left(A \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{q \cdot L^4}{8}\right) = 0}$$

Bu formülden: $\boxed{A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L}$ $\boxed{B = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L}$ $\boxed{M_B = \frac{q \cdot L^2}{8}}$ bulunur.

2. Konu İndeksi