

İlk yayın : 7 Kasım 2014

[www.guven-kutay.ch](http://www.guven-kutay.ch)

# YAPI STATİĞİ

## Gerilmeler ve Mohr dairesi Alıştırma çözümleri

44-04-4

*M. Güven KUTAY, Muhammet ERDÖL*

*En son durum: 7 Kasım 2014*

### **DİKKAT:**

*Bu çalışma iyi niyetle ve bugünün teknik imkanlarına göre yapılmıştır. Bu çalışmadaki bilgilerin yanlış kullanılmasından doğacak her türlü maddi ve manevi zarar için sorumluluk kullanana aittir. Bu çalışmadaki bilgileri kullananlara, kullandıkları yerdeki şartları iyi değerlendirip buradaki verilerin yeterli olup olmadığına karar vermeleri ve gerekirse daha detaylı hesap yapmaları önerilir. Eğer herhangi bir düzeltme, tamamlama veya bir arzunuz olursa, hiç çekinmeden bizimle temasa geçebilirsiniz.*

# İÇİNDEKİLER

1.	Eğik kaynaklı plakanın gerilme analizi .....	5
2.	Ölçülen değerlere göre gerilme analizi .....	7
2.1.	Grafik çözüm .....	8
3.	Kayma zorlanmasına göre gerilme analizi .....	10
3.1.	Grafik çözüm .....	10
3.2.	Analitik çözüm .....	10
4.	Normal kuvvet zorlanmasına göre gerilme analizi .....	11
4.1.	Grafik çözüm .....	11
4.2.	Analitik çözüm .....	11
5.	Bileşik zorlanmaya göre gerilme analizi .....	12
5.1.	Grafik çözüm .....	12
5.2.	Analitik çözüm .....	12
6.	Eğik kesitte gerilme analizi .....	13
6.1.	Grafik çözüm .....	13
6.2.	Analitik çözüm .....	13
7.	Parçada esneme ve kayma analizi .....	15
7.1.	$\alpha$ için genel esneme $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ ve kayma $\gamma_{xz}$ .....	15
7.2.	$\alpha = 60^\circ$ için esneme $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ ve kayma $\gamma_{xz}$ .....	15
7.3.	$\alpha = 60^\circ$ için asal esnemeler $\varepsilon_1$ , $\varepsilon_2$ ile yönleri 1 ve 2 .....	16
7.3.1.	Analitik .....	16
7.3.2.	Grafik çözüm .....	16
8.	Dik dörtgen kaval profilli çıkma kirişin analizi .....	17
8.1.	Kesit kuvvetleri .....	17
8.2.	1. ve 2. noktadaki gerilme durumları .....	18
8.2.1.	1. noktadaki toplam normal gerilme .....	18
8.2.2.	1. noktadaki toplam kayma gerilmesi: .....	18
8.2.3.	2. noktadaki toplam normal gerilme .....	19
8.2.4.	2. noktadaki toplam kayma gerilmesi: .....	19
8.3.	Asal gerilmeler .....	20
8.3.1.	Analitik çözüm .....	20
8.3.2.	Grafik çözüm .....	21
9.	Yatık U-profilin analizi .....	22
9.1.	Kesit değerleri .....	22
9.2.	Kesitin çekirdeği .....	23
9.3.	Verilmiş zorlamalar için nötr eksenini .....	24
9.4.	Verilmiş zorlamalar için max/min gerilmeler .....	24
10.	Yatık U-profilin analizi .....	26
10.1.	Kesitteki kesme gerilmesi .....	26
10.1.1.	Kesitte idealize edilmiş kesme gerilmelerinin dağılımı .....	27
10.1.2.	Kesme gerilmelerinin gerçek dağılımı .....	28
10.2.	Torsiyon merkezi M .....	29
11.	Yuvarlak kaval profilli çıkma kirişin analizi .....	30
11.1.	Profilde kesit değerleri .....	30
11.2.	1, 2 ve 3 numaralı noktalarda gerilmeler .....	31
11.3.	Analitik ve grafik 1, 2 ve 3 numaralı noktalarda asal gerilmeler (Mohr dairesi) .....	33
11.3.1.	Analitik ve grafik 1 numaralı noktada asal gerilmeler .....	33
11.3.1.1.	Analitik olarak 1 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri .....	33
11.3.1.2.	Grafik olarak 1 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri .....	33

11.3.2.	Analitik ve grafik 2 numaralı noktada asal gerilmeler .....	34
11.3.2.1.	Analitik olarak 2 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri .....	34
11.3.2.2.	Grafik olarak 2 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri .....	34
11.3.3.	Analitik ve grafik 3 numaralı noktada asal gerilmeler .....	35
11.3.3.1.	Analitik olarak 3 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri .....	35
11.3.3.2.	Grafik olarak 3 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri .....	35
12.	Kesiti asimetrik profil .....	36
12.1.	Ağırlık merkezi "S" ve torsiyon merkezi "M" nin koordinatları: .....	36
12.2.	Atalet momentleri $J_{\eta}$ ve $J_{\zeta}$ ile deviasyon momenti $C_{\eta\zeta}$ : .....	36
12.3.	Ana ağırlık eksenleri y ve z vede atalet momentleri $J_y$ ve $J_z$ .....	37
12.3.1.	Analitik olarak .....	37
12.3.2.	Grafik olarak Mohr dairesiyle .....	38
12.4.	Kesitin çekirdeği: .....	38
12.5.	$M_{\eta} = 5$ kNm için nötr ekseninin bulunması .....	40
12.6.	$M_{\eta} = 5$ kNm için A, B ve C deki $\sigma_x$ gerilmeler .....	40
12.7.	$V_{\zeta} = 25$ kN için D deki $\tau_{xy}$ kayma gerilmesi .....	41
12.8.	Akma mukavemeti $f_y = 235$ MPa için moment $M_{\eta}$ nin maksimum değeri .....	41
13.	Mohr benzerliği, ortadan tek kuvvetle zorlanan klasik kirişte sehim .....	42
14.	Duvarın zorlanması .....	43
14.1.	Kesit kuvvetleri .....	43
14.2.	Duvarın emniyetli en büyük yüksekliği .....	44
15.	Asimetrik T-profili .....	45
15.1.	1, 2 ve 3 numaralı noktalardaki gerilmeler .....	45
15.1.1.	1, 2 ve 3 numaralı noktalardaki gerilmeler .....	46
15.1.2.	1, 2 ve 3 numaralı noktalardaki asal normal gerilmeler ve yönleri .....	47
15.2.	$\sigma_x$ ve $\tau_{xz}$ , $\tau_{yx}$ gerilmelerinin değerleri ile dağılım diyagramları .....	48
15.2.1.	Normal gerilme $\sigma_x$ in değerleri ve dağılımı .....	48
15.2.2.	$\tau_{xz}$ , $\tau_{yx}$ gerilmelerinin değerleri ve dağılımı .....	48
16.	Mohr benzerliği, çok yataklı sistem .....	50





**Mohr dairesi çizilir:**Mohr dairesinin  
merkezi M

$$M = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

$$M = \frac{-40 + 120}{2} = 40$$

M(40; 0)

Mohr dairesinin  
yarıçapı R

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-40 - 120}{2}\right)^2 + (-60)^2}$$

R = 100,0 mm

Aranan değerler Şekil 1-a dan okunur

$$\sigma_1 \approx 140 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} \approx 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_n \approx 1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{tn} \approx 92 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 \approx -60 \text{ MPa}$$

$$\varphi_1 \approx 109^\circ$$

$$\sigma_t \approx 78 \text{ MPa}$$

$$\tau_{nt} \approx -92 \text{ MPa}$$

Bu değerler analitik olarakta hesaplanır.

**Asal normal gerilmeler :  $\sigma_1 > \sigma_2$** 

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-40 + 120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 120}{2}\right)^2 + (-60)^2}$$

$$\sigma_1 = 140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -60 \text{ MPa}$$

**Asal gerilme yönü  $\varphi_1$** 

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot (-60)}{-40 - 120} = 0,75 \quad \varphi_1 = 18,4^\circ + 90^\circ$$

$$\varphi_1 = 108,4^\circ$$

**Maksimum kayma gerilmesi  $\tau_{\max}$** 

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{-40 - 120}{2}\right)^2 + (-60)^2}$$

$$\tau_{\max} = 100 \text{ MPa}$$

**Kaynak dikişi a-a daki gerilmeler:**

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa} \quad \sigma_z = 120 \text{ MPa} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -60 \text{ MPa} \quad \delta = 38^\circ$$

Önce burada  $\varphi = 90^\circ - \delta$   $\varphi = 52^\circ$  bulunur. $\sigma_n$  için

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_z \cdot \sin^2 \varphi + \tau_{zx} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma_n = (-40) \cdot \cos^2 52 + 120 \cdot \sin^2 52 + (-120) \cdot 2 \cdot \sin 52 \cdot \cos 52$$

$$\sigma_n = 1,136 \text{ MPa}$$

 $\sigma_t$  için

$$\sigma_t = \sigma_x \cdot \sin^2 \varphi + \sigma_z \cdot \cos^2 \varphi + \tau_{zx} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma_t = (-40) \cdot \sin^2 52 + 120 \cdot \cos^2 52 - (-60) \cdot 2 \cdot \sin 52 \cdot \cos 52$$

$$\sigma_t = 78,864 \text{ MPa}$$

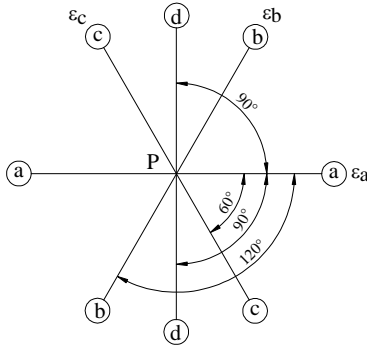
 $\tau_{tn} = \tau_{nt}$  için

$$\tau_{tn} = \tau_{nt} = (\sigma_z - \sigma_x) \cdot \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{zx} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$\tau_{tn} = \tau_{nt} = (120 + 40) \cdot \sin 52 \cdot \cos 52 + (-60) \cdot (\cos^2 52 - \sin^2 52)$$

$$\tau_{tn} = \tau_{nt} = 92,138 \text{ MPa}$$

## 2. Ölçülen değerlere göre gerilme analizi



Şekil 2, Ölçülen değerler

Şekil 2 ile görülen bir düzlemde a, b, c yönlerinde ölçülen esnemelere göre gerilme analizi.

**Bilinenler:**  $\varepsilon_a = 2,50 \text{ ‰}$   
 $\varepsilon_b = -0,40 \text{ ‰}$   
 $\varepsilon_c = 0,40 \text{ ‰}$

**Arananlar:**

Grafik ve analitik olarak ana esnemeler ve yönleri ile d yönündeki esneme  $\varepsilon_d$ .

### Çözüm:

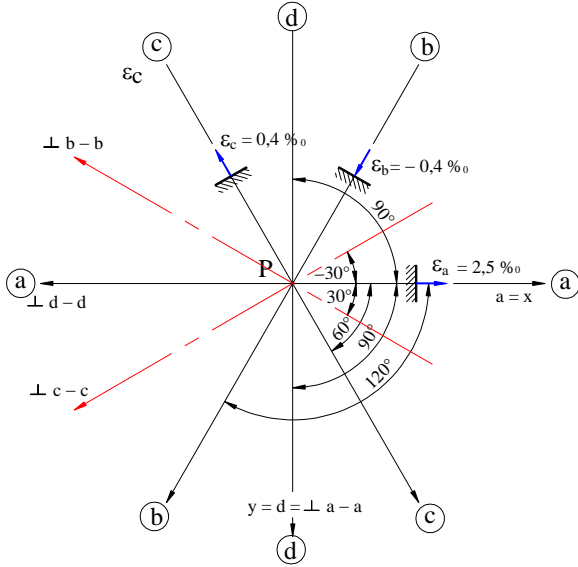
Koordinatların transformasyonu ile (Mohr analogisine göre) burada;

$\sigma_n = \varepsilon_n$  ;  $\sigma_x = \varepsilon_x$  ;  $\sigma_y = \varepsilon_y$  ve  $\tau_{xy} = \gamma_{xy} / 2$  kabul edilir ve

$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi$  denklemine analog olarak

$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cdot \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \cdot \sin \varphi \cos \varphi$  denklemini yazılır (teoriye bakınız.)

Problemi şüpheye düşmeden çözmek için önce bilinenler ve bildiklerimizi çizip görelim:



$\varepsilon_a = 2,50 \text{ ‰}$   $\varphi_a = 0^\circ$

$\varepsilon_b = -0,40 \text{ ‰}$   $\varphi_b = 120^\circ$

$\varepsilon_c = 0,40 \text{ ‰}$   $\varphi_c = 60^\circ$

$\cos^2(\varphi_a) = 1$   $\sin^2(\varphi_a) = 0$

$\sin(\varphi_a)\cos(\varphi_a) = 0$

$\cos^2(\varphi_b) = 0,25$   $\sin^2(\varphi_b) = 0,75$

$\sin(\varphi_b)\cos(\varphi_b) = -0,433$

$\cos^2(\varphi_c) = 0,25$   $\sin^2(\varphi_c) = 0,75$

$\sin(\varphi_c)\cos(\varphi_c) = 0,433$

Şekil 2a, Ölçülen değerler ve bilinenler

Koordinatların transformasyonu üç bilinmeyen için yazalım:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_b \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_a) & \sin^2(\varphi_a) & \sin(\varphi_a)\cos(\varphi_a) \\ \cos^2(\varphi_b) & \sin^2(\varphi_b) & \sin(\varphi_b)\cos(\varphi_b) \\ \cos^2(\varphi_c) & \sin^2(\varphi_c) & \sin(\varphi_c)\cos(\varphi_c) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Buraya bildiklerimizi yerleştirip  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$  değerlerini bulalım.

$$\begin{Bmatrix} 2,5 \\ -0,40 \\ 0,40 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,75 & -0,433 \\ 0,25 & 0,75 & 0,433 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Bu denklemle:

$\varepsilon_x = 2,500 \text{ ‰}$
$\varepsilon_y = -0,833 \text{ ‰}$
$\gamma_{xy} = 0,924 \text{ ‰}$

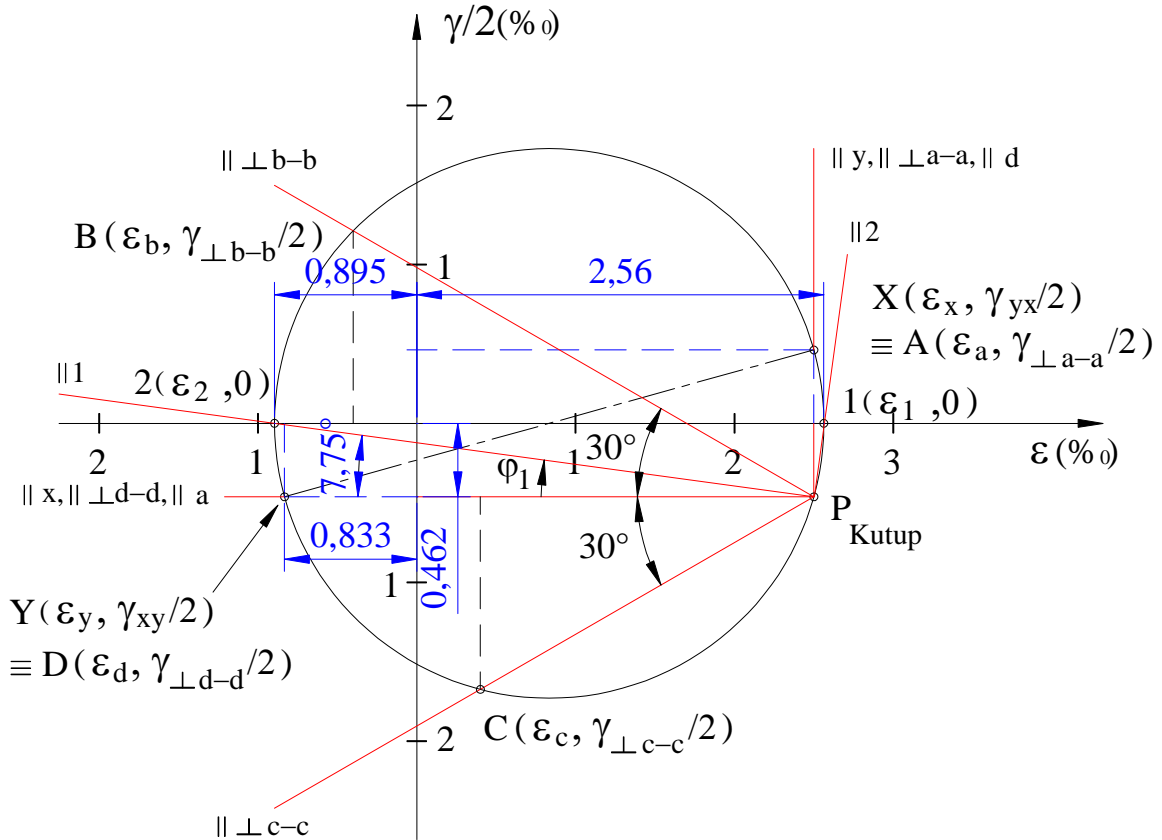
bulunur.

Burada deformasyon tensörü:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,500 & 0,462 \\ 0,462 & -0,833 \end{pmatrix}$$

## 2.1. Grafik çözüm

Ordinatı  $\gamma/2$  [‰] ve apsisi  $\varepsilon$  [‰] olan Mohr dairesinin koordinat sistemimizi çizelim ve  $X(\varepsilon_x, \gamma_{yx}/2)$  ile  $Y(\varepsilon_y, \gamma_{xy}/2)$  noktalarını işaretleyelim. Bu noktaları birleştiren apsi kestiği nokta Mohr dairesinin merkezidir ve dairenin yarı çapı MX kadardır.



Şekil 2b, Mohr dairesi

X ve Y noktalarından ordinat ve apsiye çizilen paralellerin Mohr dairesi ile ortak keştiği nokta kutup noktası P dir.

Şekil 2b den okunanlar:  $\varepsilon_1 \approx 2,56 \text{ ‰}$  ,  $\varepsilon_2 \approx -0,895 \text{ ‰}$  ,  $\varphi_1 \approx 7,75^\circ$  ,  
 $\varepsilon_d \approx -0,833 \text{ ‰}$  ,  $\gamma_{\perp d-d}/2 \approx -0,462 \text{ ‰}$



Analitik çözüm:

Ana esnemeler:  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{2,5 - 0,833}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,5 + 0,833}{2}\right)^2 + \left(\frac{0,924}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_1 = \underline{\underline{2,563\%}}$$

$$\varepsilon_2 = \underline{\underline{-0,896\%}}$$

Ana esneme yönü  $\varphi_1$  : x ve 1 eksenleri arasında saat yönü + pozitif olarak.

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0,924}{2,5 + 0,833} = 0,277 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \underline{\underline{7,75^\circ}}$$

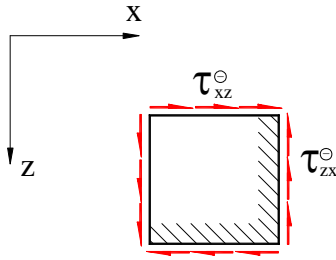
d-d yönünde esneme: x ve d eksenleri arasındaki açı  $\varphi_d = 90^\circ$  dir.

$$\varepsilon_d = \varepsilon_x \cdot \cos^2 \varphi_d + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi_d + \gamma_{xy} \cdot \sin \varphi_d \cdot \cos \varphi_d = \varepsilon_y \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_d = \underline{\underline{-0,833\%}}$$

Burada kontrolü yaparsak:

$$\gamma_{\perp d-d} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cdot 2 \cdot \sin \varphi_d \cdot \cos \varphi_d + \gamma_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi_d - \sin^2 \varphi_d) = -\gamma_{xy} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\perp d-d} = \underline{\underline{-0,924\%}}$$

### 3. Kayma zorlanmasına göre gerilme analizi



Şekil 3 ile görülen cisim parçasının gerilme analizi.

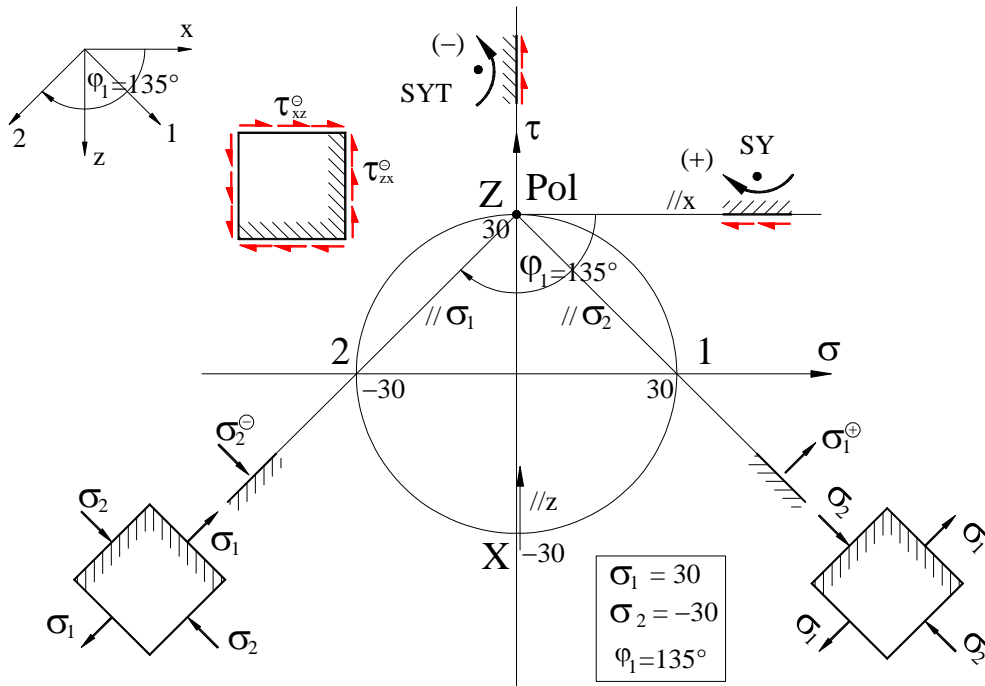
**Bilinenler:**  $\tau_{zx} = \tau_{xz} = -30$  MPa

**Arananlar:**

Grafik ve analitik olarak kutup noktası, asal gerilmeler ve yönleri.

Şekil 3, Cisim parçasının zorlanması

#### 3.1. Grafik çözüm



Şekil 3 a, Grafik çözüm, SY = saat yönü, SYT = saat yönünün tersine

#### 3.2. Analitik çözüm

Bilinen değerler :  $\tau_{zx} = \tau_{xz} = -30$  MPa  $\sigma_x = \sigma_z = 0$

Asal gerilmeler: 
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \pm \tau_{zx} = \pm 30$$

$$\sigma_1 = 30 \text{ MPa}$$

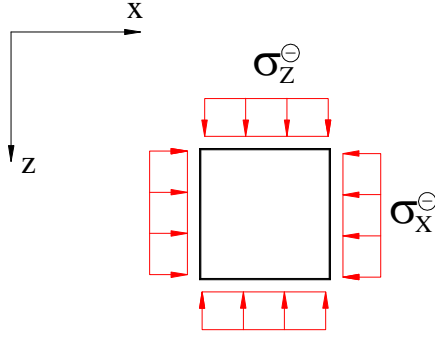
$$\sigma_2 = -30 \text{ MPa}$$

Asal gerilme yönü  $\phi_1$  :  $\tan 2\phi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot (-30)}{0}$  2.  $\phi_1 = 90^\circ$

$$\phi_1 = 45^\circ$$

Analitik olarak asal gerilme yönü açısı  $\phi_1$  in değeri tam olarak hesaplanamaz. Hakiki açı büyüklüğü buradada görüldüğü gibi grafik çözümde görülür.

#### 4. Normal kuvvet zorlanmasına göre gerilme analizi



Şekil 4 ile görülen cisim parçasının gerilme analizi.

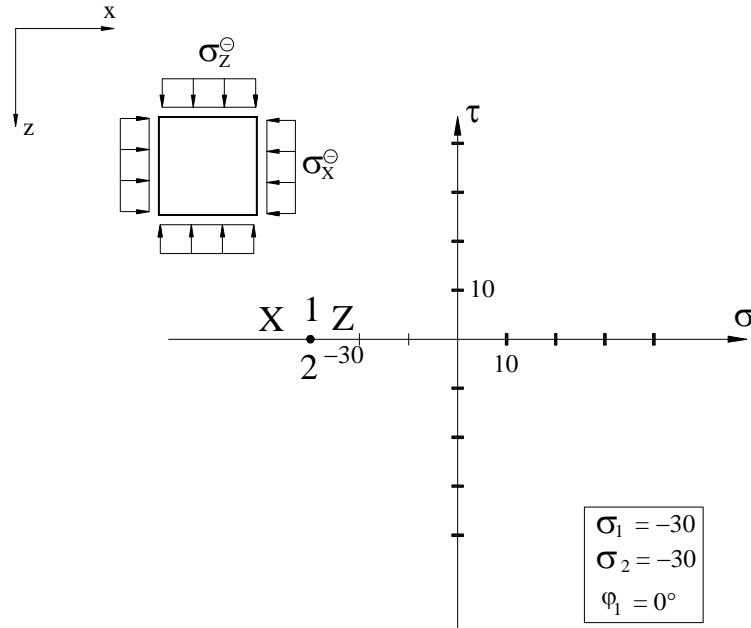
**Bilinenler:**  $\sigma_z = \sigma_x = -30 \text{ MPa}$

**Arananlar:**

Grafik ve analitik olarak kutup noktası, asal gerilmeler ve yönleri.

Şekil 4, Cisim parçasının zorlanması

#### 4.1. Grafik çözüm



Şekil 4 a, Grafik çözüm

#### 4.2. Analitik çözüm

Bilinen değerler :  $\sigma_x = \sigma_z = -30 \text{ N/mm}^2$   $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$

$$\text{Asal gerilmeler: } \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-30 - 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30 + 30}{2}\right)^2 + 0}$$

$$\sigma_{1,2} = -30$$

$$\sigma_1 = -30 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -30 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Asal gerilme yönü } \varphi_1 : \tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 0}{-30 + 30}$$

$$2 \cdot \varphi_1 = 0^\circ$$

$$\varphi_1 = 0^\circ$$

Burada tipik "*hidrostatik durum*" var.

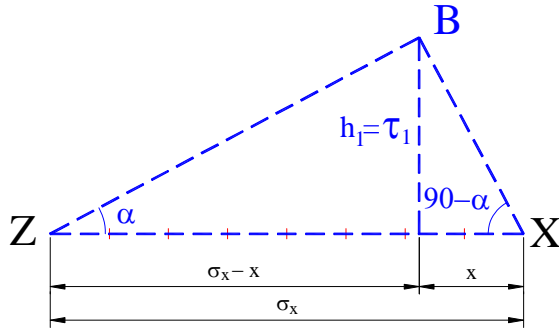
Mohr dairesi burada bir nokta olarak görülür, daire diye bir şey yoktur. Cisim nasıl döndürülürse döndürülsün gerilmeler değişmez sabit kalır.





## b) b-b kesitinde gerilme durumu

$\alpha$  açısı biliniyor ve değeri:  $\alpha = 28^\circ$



Şekil 6 b, Grafik çözüm

XBZ üçgeninden;

$$x = h_1 \cdot \tan(90 - \alpha) \quad \text{und} \quad \sigma_x - x = h_1 \cdot \tan \alpha$$

$$h_1 = \tau_{nt} = \tau_{tn} = \frac{\sigma_x}{\tan \alpha + \tan(90 - \alpha)}$$

$$\tau_1 = \tau_{nt} = 3,31615 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{n,t} = \frac{\tau_{nt}}{\tan \alpha}$$

$$\sigma_t = 6,23677 \text{ MPa}$$

Eğiklik açısı:

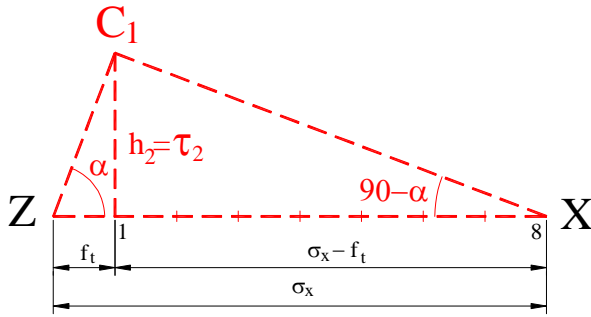
$$\alpha = 28^\circ$$

Ana gerilme:

$$\sigma_t = 6,24 \text{ MPa}$$

Kayma gerilmesi:

$$\tau_{nt} = 3,32 \text{ MPa}$$

c) c-c kesitinde yapıştırma malzemesinin çekme mukavemet değerini ( $f_t = 1 \text{ MPa}$ ) aşmayan  $\beta$  açısının değeri

Şekil 6 c, Grafik çözüm

XC1Z üçgeninden;

$$f_t = h_2 \cdot \tan \alpha \quad \text{ve} \quad \sigma_x - f_t = h_2 \cdot \tan(90 - \alpha)$$

$$\alpha = \arctan \sqrt{\frac{f_t}{\sigma_x - f_t}} = \arctan \sqrt{\frac{1}{7}}$$

$$\alpha_1 = 69,295189^\circ = \alpha_{\min}$$

$$\text{Şekil 6 dan} \quad \alpha_2 = 180 - \alpha_1 \quad \alpha_2 = 110,704811^\circ = \alpha_{\max}$$

Emniyetli " $\beta$  açısı" u değerlerin arasındadır:

$$\alpha_1 = 69,3^\circ < \beta < \alpha_2 = 110,7^\circ$$

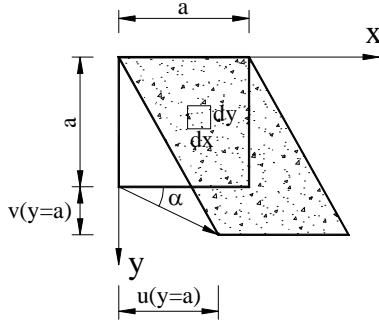
Maksimum ana gerilme:

$$\sigma_{\max} = f_t = 1 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Kayma gerilmesi:} \quad \tau_{(\sigma_{\max})} = \frac{f_t}{\tan(90 - \alpha_1)} = \frac{1}{\tan(90 - 69,295189)}$$

$$\tau_{(\sigma_{\max})} = 2,645 \text{ N/mm}^2$$

## 7. Parçada esneme ve kayma analizi



Şekil 7, Esneyen düzlem parçası

Şekil 7 ile görülen düzlem alanının esneme değerlerinin analitik ve grafik bulunması.

### Bilinenler:

Kare şekilli alanın kenarı "a" kadardır.

x-yönünde esneme büyüklüğü  $u = \delta \cdot \cos \alpha \cdot (y/a)$ ,

y-yönünde esneme büyüklüğü  $v = \delta \cdot \sin \alpha \cdot (y/a)$  dır.

**Arananlar:** analitik ve grafik olarak:

1.  $\alpha$  için genel esneme  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve kayma  $\gamma_{xz}$ ,
2.  $\alpha = 60^\circ$  için esneme  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ve kayma  $\gamma_{xz}$ ,
3.  $\alpha = 60^\circ$  için asal esnemeler  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  ile yönleri 1 ve 2.

### Çözüm:

Genel olarak  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$   $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$  değerindedir.

### 7.1. $\alpha$ için genel esneme $\epsilon_x$ , $\epsilon_y$ ve kayma $\gamma_{xz}$

$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$   $u = \delta \cdot \cos \alpha \cdot (y/a)$  olduğundan x-yönünde u = sabit değerdir ve  $\epsilon_x = 0$  dır.

$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$   $v = \delta \cdot \sin \alpha \cdot (y/a)$  dır.  $\epsilon_y = \frac{\delta \cdot \sin \alpha \cdot y}{a \cdot y} \rightarrow \epsilon_y = \frac{\delta}{a} \cdot \sin \alpha$  dır.

$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$   $\frac{\partial v}{\partial x}$  değeri  $v = \delta \cdot \sin \alpha \cdot (y/a)$  olduğundan x-yönünde v = sabit değerdir

ve  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  dır.

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\delta \cdot \cos \alpha \cdot y}{a \cdot y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\delta}{a} \cdot \cos \alpha$  dır.

$\gamma_{xy} = 0 + 0,5 \cdot \frac{\delta}{a} \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\delta}{a} \cdot \cos \alpha$  dır.

### 7.2. $\alpha = 60^\circ$ için esneme $\epsilon_x$ , $\epsilon_y$ ve kayma $\gamma_{xz}$ ,

$\alpha = 60^\circ$  için x-yönünde esneme  $\epsilon_x = 0$

$\alpha = 60^\circ$  için y-yönünde esneme  $\epsilon_y = 0,866 \cdot \frac{\delta}{a}$

$\alpha = 60^\circ$  için kayma açısı  $\gamma_{xy} = 0,5 \cdot \frac{\delta}{a}$

### 7.3. $\alpha = 60^\circ$ için asal esnemeler $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ile yönleri 1 ve 2.

#### 7.3.1. Analitik

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}} = \frac{0 + 0,866 \cdot \delta/a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 0,866 \cdot \delta/a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{4 \cdot a}\right)^2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{a} \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \quad \varepsilon_1 = 0,933 \cdot \frac{\delta}{a}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta}{a} \cdot \frac{\sqrt{3} - 2}{4} \quad \varepsilon_2 = -0,067 \cdot \frac{\delta}{a}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0,5 \cdot \delta/a}{0 - 0,866 \cdot \delta/a} \quad \tan 2\varphi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \varphi_{1x} = a \tan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

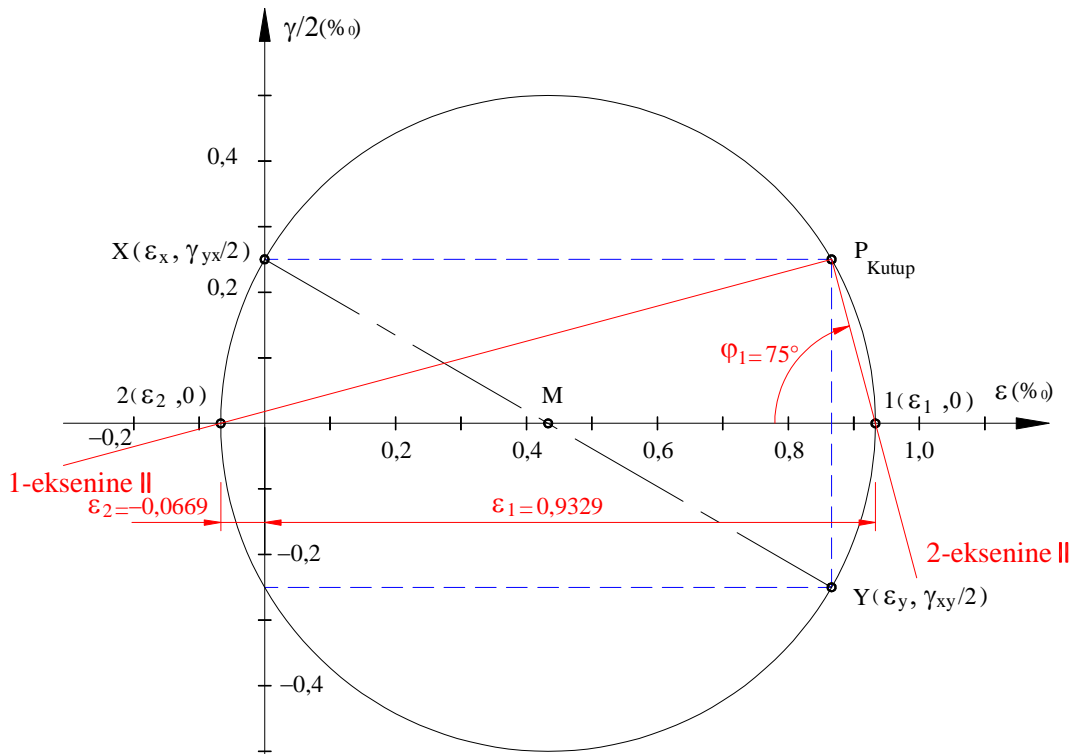
$$\varphi_{1x} = -15^\circ$$

$$\varphi_1 = 90 - 15$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = 75^\circ}}$$

Bu durum grafik çözümde daha belirli gözükür.

#### 7.3.2. Grafik çözüm



Şekil 7-01,

Grafikten okunanlar (çizim programıyla):

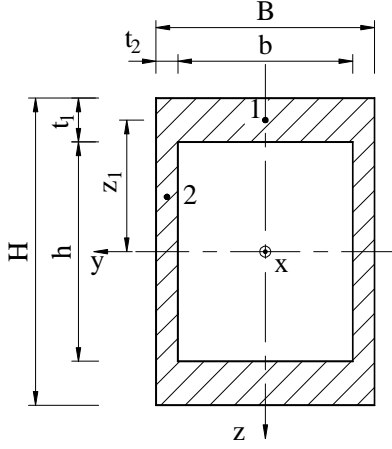
$$\underline{\underline{\varepsilon_1 = 0,9329 \cdot \frac{\delta}{a}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon_2 = -0,0669 \cdot \frac{\delta}{a}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\varphi_1 = 75^\circ}}$$





## 8.2. 1. ve 2. noktalardaki gerilme durumları

### 8.2.1.1. noktadaki toplam normal gerilme



Şekil 8 b, 1. noktadaki normal gerilme

1. noktadaki çekme gerilmesi:

Kesitin alanı:

$$A_p = B_p \cdot H_p - b_p \cdot h_p \quad A_p = 2400 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{N_{x1}} = \frac{N_x}{A_p} \quad \underline{\underline{\sigma_{N_{x1}} = 2,083 \text{ MPa}}}$$

1. noktadaki eğilme gerilmesi:

Bağlantı kesitindeki eğilme momenti:

$$M_y = -N_x \cdot L_1 \quad M_y = -20 \text{ MNm}$$

1. noktanın ağırlık merkezine mesafesi:

$$z_1 = -0,5 \cdot (h_p + t_1) \quad z_1 = 1,2 \text{ m}$$

Bağlantı kesitinin atalet momenti:

$$J_y = \frac{B_p \cdot H_p^3 - b_p \cdot h_p^3}{12} \quad J_y = 2,592 \text{ m}^4$$

$$\sigma_{M_{y1}} = \frac{M_y}{J_y} \cdot z_1$$

$$\underline{\underline{\sigma_{M_{y1}} = 9,259 \text{ MPa}}}$$

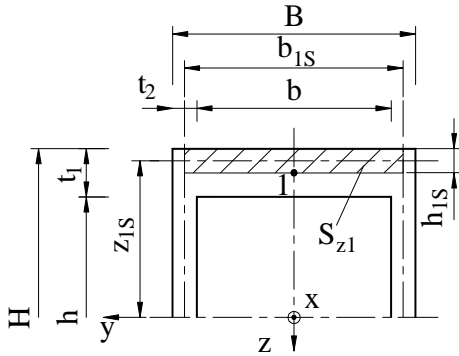
1. noktadaki toplam normal gerilme:

$$\sigma_{x1} = \sigma_{N_{x1}} + \sigma_{M_{y1}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{x1} = 11,343 \text{ MPa}}}$$

### 8.2.2.1. noktadaki toplam kayma gerilmesi:

1. noktadaki kesme gerilmesi:



$$\tau_{xz1} = \frac{V_z \cdot S_{y_{z1}}}{b_{1S} \cdot J_y}$$

y-eksenine göre statik moment:

$$S_{y_{z1}} = z_{1S} \cdot A_{1S}$$

Statik moment alanı ağırlık merkezinin z mesafesi:

$$z_{1S} = 0,5 \cdot h_p + 0,75 \cdot t_1 \quad z_{1S} = 1,3 \text{ m}$$

Statik moment alanının  $V_z$  kuvvetine dik genişliği:

$$b_{1S} = B_p - t_2 \quad b_{1S} = 1,8 \text{ m}$$

$$h_{1S} = 0,5 \cdot t_1 \quad h_{1S} = 0,2 \text{ m}$$

$$A_{1S} = b_{1S} \cdot h_{1S} \quad A_{1S} = 0,36 \text{ m}^2$$

Bu değerlerle y-eksenine göre statik moment:  $S_{y_{z1}} = 1,3 \cdot 0,36$

$$S_{y_{z1}} = 0,468 \text{ m}^3$$

$$\tau_{xz1} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,468}{1,8 \cdot 2,592}$$

$$\underline{\underline{\tau_{xz1} = 0,502 \text{ MPa}}}$$

**Bredt** kesit alanı:

$$A_0 = h_0 \cdot b_0 = 2,4 \cdot 1,8$$

$$A_0 = 4,32 \text{ mm}^2$$

1. noktadaki torsiyon gerilmesi:

$$\tau_{t1} = \frac{T}{2 \cdot A_0 \cdot t_1} = \frac{20 \cdot 10^9}{2 \cdot 4,32 \cdot 10^6 \cdot 400} \quad \underline{\underline{\tau_{t1} = 5,787 \text{ MPa}}}$$

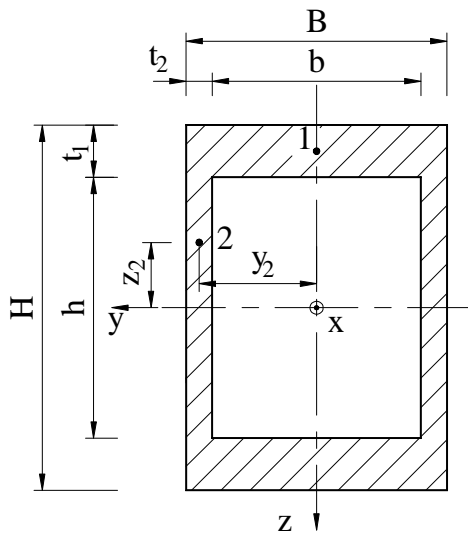
1. noktadaki toplam kayma gerilmesi:

$$\tau_{1x} = \sqrt{\tau_{xz1}^2 + \tau_{t1}^2} \quad \underline{\underline{\tau_{1x} = 5,809 \text{ MPa}}}$$

Kayma gerilmeleri birbirlerine dik. Hesaplar için torsiyon momenti " $\tau_1 = \tau_{t1}$ " i kabul edelim.

$$\underline{\underline{\tau_1 = 5,787 \text{ MPa}}}$$

8.2.3.2. noktadaki toplam normal gerilme



2. noktadaki çekme gerilmesi:

$$\sigma_{Nx2} = \frac{N_x}{A_p} \quad \underline{\underline{\sigma_{Nx2} = 2,083 \text{ MPa}}}$$

2. noktadaki eğilme gerilmesi:

2. noktanın ağırlık merkezine mesafesi belli:

$$z_2 = 500 \text{ mm}$$

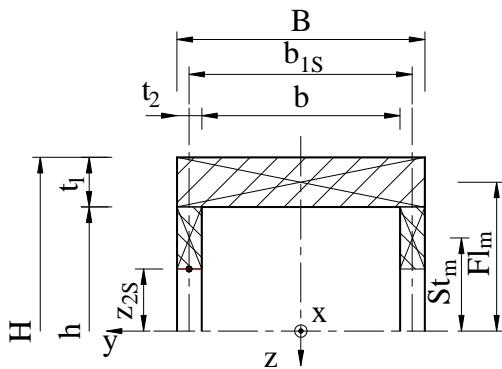
$$\sigma_{My2} = \frac{M_y}{J_y} \cdot z_2 \quad \underline{\underline{\sigma_{My2} = 3,858 \text{ MPa}}}$$

2. noktadaki toplam normal gerilme:

$$\sigma_{x2} = \sigma_{Nx2} + \sigma_{My2} \quad \underline{\underline{\sigma_{x2} = 5,941 \text{ MPa}}}$$

Şekil 8 d, 2. noktadaki normal gerilme

8.2.4.2. noktadaki toplam kayma gerilmesi:



2. noktadaki kesme gerilmesi:

$$\tau_{xz2} = \frac{V_z \cdot S_{yz2}}{b_{t2} \cdot J_y}$$

y-eksenine göre statik moment:

$$S_{yz2} = z_{F1m} \cdot A_{F1} + z_{Stm} \cdot A_{St}$$

$$z_{F1m} = 0,5 \cdot (h_p + t_1) \quad z_{F1m} = 1,2 \text{ m}$$

$$A_{F1} = t_1 \cdot B_p \quad A_{F1} = 0,80 \text{ m}^2$$

$$z_{Stm} = 0,5 \cdot (0,5 \cdot h_p + z_{2S}) \quad z_{Stm} = 0,750 \text{ m}$$

$$A_{St} = 2 \cdot t_2 \cdot (0,5 \cdot h_p - z_{2S}) \quad A_{St} = 0,20 \text{ m}^2$$

Şekil 8 e, 2. noktadaki kayma gerilmesi

$$b_{t2} = 2 \cdot t_2 = 2 \cdot 0,2$$

$$b_{t2} = 0,4 \text{ m}$$

Bu değerlerle y-eksenine göre 2. nokta için statik moment:

$$S_{yz2} = 1,2 \cdot 0,8 + 0,75 \cdot 0,2$$

$$S_{yz2} = 1,110 \text{ m}^3$$

$$\tau_{zy2} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1,11}{0,4 \cdot 2,592}$$

$$\tau_{zy2} = 0,502 \text{ MPa}$$

2. noktadaki torsiyon gerilmesi:  $\tau_{t2} = \frac{T}{2 \cdot A_0 \cdot t_2}$

$$\tau_{t2} = 11,574 \text{ MPa}$$

2. noktadaki toplam kayma gerilmesi:

$$\tau_2 = \sqrt{\tau_{zy2}^2 + \tau_{t2}^2}$$

$$\tau_2 = 16,927 \text{ MPa}$$

### 8.3. Asal gerilmeler

#### 8.3.1. Analitik çözüm

*Yukarıda hesaplanan değerlere göre 1. noktadaki asal gerilmeler ve yönü:*

$$\sigma_{x1} = 11,343 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y1} = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_1 = 5,787 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1/1,2} = \frac{\sigma_{x1} + \sigma_{y1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x1} - \sigma_{y1}}{2}\right)^2 + \tau_1^2} = \frac{11,343 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11,343 - 0}{2}\right)^2 + 5,787^2}$$

1. noktadaki asal gerilmeler:

$$\sigma_{11} = 13,774 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{12} = -2,431 \text{ MPa}$$

Asal gerilme yönü  $\varphi_{11}$  :  $\tan 2\varphi_{11} = \frac{2 \cdot \tau_1}{\sigma_{x1} - \sigma_{y1}} = \frac{2 \cdot 5,787}{11,343 - 0}$

2.  $\varphi_1 = \arctan 1,020$

2.  $\varphi_{11} = 0,795$        $\varphi_{11} = 0,3977 \text{ rad}$

$$\varphi_{11} = 22,789^\circ$$

*Yukarıda hesaplanan değerlere göre 2. noktadaki asal gerilmeler ve yönü:*

$$\sigma_{x2} = 5,941 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y2} = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = 16,927 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2/1,2} = \frac{\sigma_{x2} + \sigma_{y2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x2} - \sigma_{y2}}{2}\right)^2 + \tau_2^2} = \frac{5,941 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,941 - 0}{2}\right)^2 + 16,927^2}$$

2. noktadaki asal gerilmeler:

$$\sigma_{21} = 20,156 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22} = -14,215 \text{ MPa}$$

Asal gerilme yönü  $\varphi_{21}$ :  $\tan 2\varphi_{21} = \frac{2 \cdot \tau_2}{\sigma_{x2} - \sigma_{y2}} = \frac{2 \cdot 16,927}{5,941 - 0}$

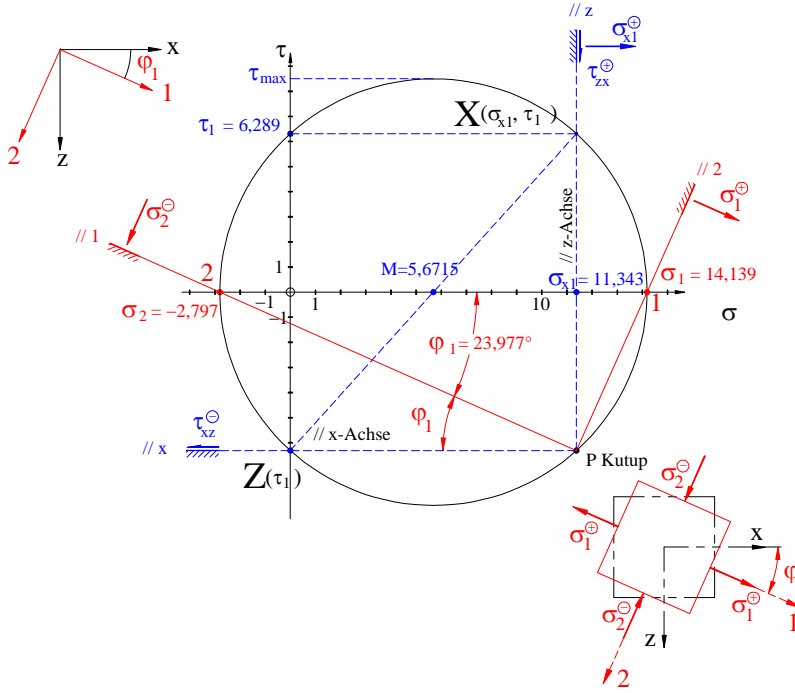
2.  $\varphi_{21} = \arctan 5,698$

2.  $\varphi_{21} = 1,397$        $\varphi_{21} = 0,699 \text{ rad}$

$$\varphi_{21} = 40,023^\circ$$

## 8.3.2. Grafik çözüm

## 1. noktadaki asal gerilmeler ve yönü:



$$\sigma_{x1} = 11,343 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y1} = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_1 = 5,787 \text{ MPa}$$

Bu değerlerle Mohr dairesi çizilir ve şu değerler okunur:

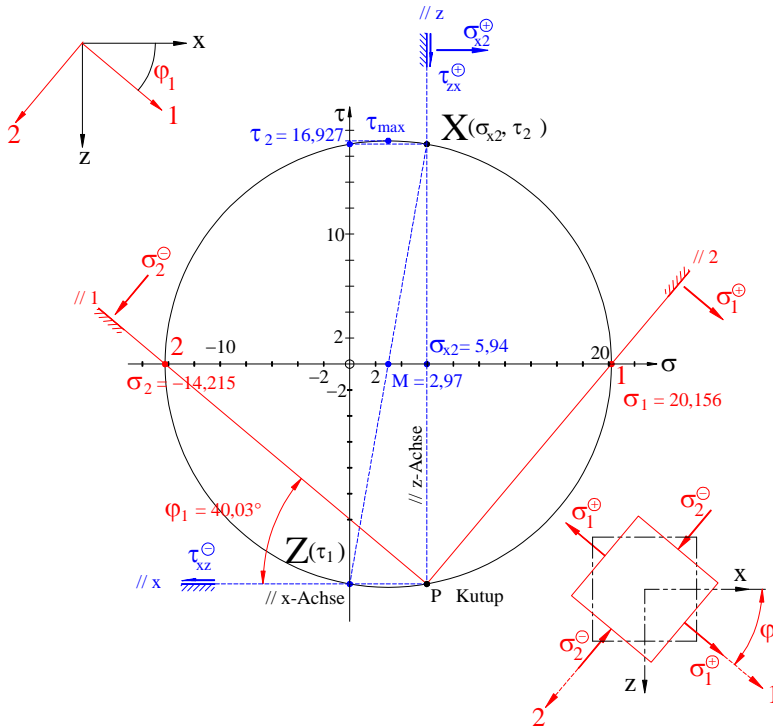
$$\underline{\underline{\sigma_{11} = 11,777 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{12} = -2,431 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{11} = 22,789^\circ}}$$

Şekil 8 f, 1. nokta için Mohr dairesi

## 2. noktadaki asal gerilmeler ve yönü:



$$\sigma_{x2} = 5,941 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y2} = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = 16,927 \text{ MPa}$$

Bu değerlerle Mohr dairesi çizilir ve şu değerler okunur:

$$\underline{\underline{\sigma_{21} = 20,156 \text{ MPa}}}$$

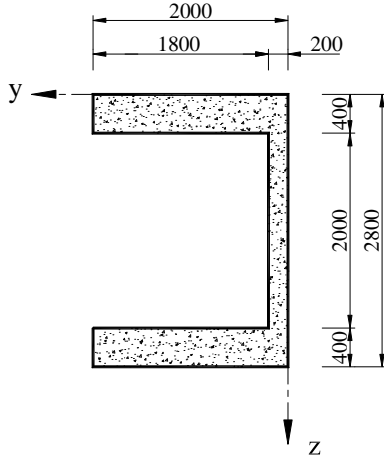
$$\underline{\underline{\sigma_{22} = -14,215 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{21} = 40,03^\circ}}$$

Şekil 8 g, 2. nokta için Mohr dairesi

Grafik çözüm elektronik beyinle çizildiğinden sonuçlar analitik sonuçlar kadar doğrudur.

## 9. Yatık U-profilin analizi



Şekil 9, Yatık U-profil

Şekil 9 ile ölçüleri verilen yatık U-profilin analizi.

### Bilinenler:

Kesit değerleri:

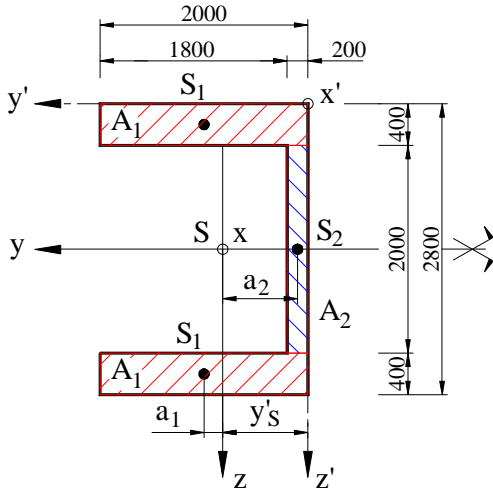
$$N_x = -8 \text{ MN} ; M_y = 12 \text{ MNm} ; M_z = -2 \text{ MNm}$$

### Arananlar:

1. Kesit değerleri: Kesit alanı  $A$ ,  
Ağırlık merkezi  $O$ ,  
Ana atalet momentleri  $I_y$  ve  $I_z$ ,
2. Kesitin çekirdeği,
3. Nötr çizgisi (Nötr eksen)
4.  $N_x$  ;  $M_y$  ;  $M_z$  ye göre max ve min gerilmeler.

## Çözüm:

### 9.1. Kesit değerleri



Şekil 9-01, Kesit değerleri

### Kesit alanı $A$ :

$$A = 2 \cdot A_1 + A_2 = 2 \cdot 2000 \cdot 400 + 2000 \cdot 200$$

$$A = 2 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

### Ağırlık merkezi " $S$ ":

$$z'_S = \frac{\sum z'_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad \text{Burada parça simetrik olduğundan;}$$

$$z'_S = 1400 \text{ mm}$$

$$y'_S = \frac{\sum y'_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 2000 \cdot 400 + 100 \cdot 2000 \cdot 200}{2 \cdot 10^6}$$

$$y'_S = 820 \text{ mm}$$

Ağırlık merkezinin koordinatları  $S (y'_S, z'_S) = S (820, 1400)$

### Atalet momentleri " $J_y$ ve $J_z$ ":

$$J_y = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2000 \cdot 2800^3}{12} - \frac{1800 \cdot 2000^3}{12}$$

$$J_y = 2,459 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4$$

Steiner' e göre:  $J_z = \sum (J_{zi0} + a_i^2 \cdot A_i)$

$$J_z = 2 \cdot \left( \frac{400 \cdot 2000^3}{12} + 180^2 \cdot 2000 \cdot 400 \right) + \frac{2000 \cdot 200^3}{12} + 720^2 \cdot 2000 \cdot 200$$

$$J_z = 0,794 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4$$

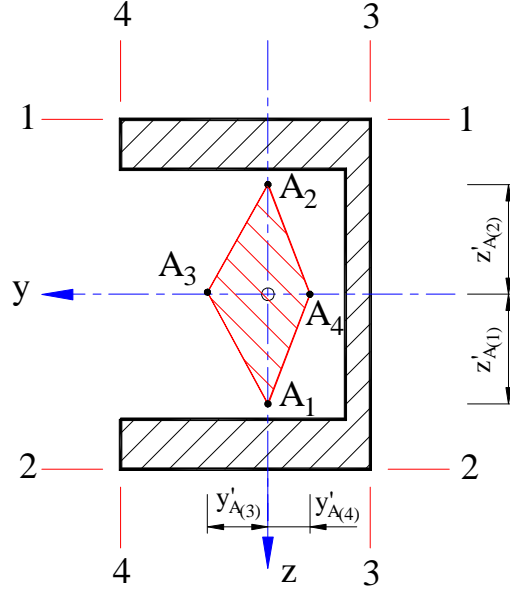
## 9.2. Kesitin çekirdeği

Ana koordinat eksenlerine için nötr eksen  $\sigma_x = 0 \quad 1 + \frac{z_A}{i_y^2} \cdot z + \frac{y_A}{i_z^2} \cdot y = 0$

Ana atalet radyusları:  $i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{2,459 \cdot 10^{12}}{2,0 \cdot 10^6} \quad \underline{\underline{i_y^2 = 1,229 \cdot 10^6 \text{ mm}^2}}$

$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{0,794 \cdot 10^{12}}{2,0 \cdot 10^6} \quad \underline{\underline{i_z^2 = 0,397 \cdot 10^6 \text{ mm}^2}}$

**Ana eksenlere paralel nötr eksenleri:**



Şekil 9-02, Kesit çekirdeği

	y-eksenine paralel nötr eksen		z-eksenine paralel nötr eksen	
y-ekseni ile kesişme noktası:	$P (y_P = \pm\infty, 0)$	$y_A = -\frac{i_z^2}{y_P} = 0$	$P (y_P, 0)$	$y_A = -\frac{i_z^2}{y_P}$
z-ekseni ile kesişme noktası:	$Q (0, z_Q)$	$z_A = -\frac{i_y^2}{z_Q}$	$Q (0, z_Q = \pm\infty)$	$z_A = -\frac{i_y^2}{z_Q} = 0$

**Nötr eksenlerinin noktalarının koordinatları:**

1-1 kenarı için:  $P (y_P, 0) = (\pm\infty, 0) \Rightarrow y_{A(1)} = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{0,397 \cdot 10^6}{\pm\infty} = 0$

$Q (0, z_Q) = (0, -1400) \Rightarrow z_{A(1)} = -\frac{i_y^2}{z_Q} = -\frac{1,229 \cdot 10^6}{-1400} = \underline{\underline{878\text{mm}}}$

2-2 kenarı için:  $P (y_P, 0) = (\pm\infty, 0) \Rightarrow y_{A(2)} = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{0,397 \cdot 10^6}{\pm\infty} = 0$

$Q (0, z_Q) = (0, 1400) \Rightarrow z_{A(2)} = -\frac{i_y^2}{z_Q} = -\frac{1,229 \cdot 10^6}{1400} = \underline{\underline{-878\text{mm}}}$

$$\begin{aligned}
 \text{3-3 kenarı için: } P(y_P, 0) = (-820, 0) & \Rightarrow y_{A(3)} = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{0,397 \cdot 10^6}{-820} = \underline{\underline{484 \text{ mm}}} \\
 Q(0, z_Q) = (0, \pm\infty) & \Rightarrow z_{A(3)} = -\frac{i_y^2}{z_Q} = -\frac{1,229 \cdot 10^6}{\pm\infty} = 0 \\
 \text{4-4 kenarı için: } P(y_P, 0) = (1180, 0) & \Rightarrow y_{A(4)} = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{0,397 \cdot 10^6}{1180} = \underline{\underline{-336 \text{ mm}}} \\
 Q(0, z_Q) = (0, \pm\infty) & \Rightarrow z_{A(4)} = -\frac{i_y^2}{z_Q} = -\frac{1,229 \cdot 10^6}{\pm\infty} = 0
 \end{aligned}$$

Eğer  $N_x$  (1) de etkiliyse, nötr eksenini (sıfır çizgisi) üst kesit kenarı 1-1 de dir, v.b..

### 9.3. Verilmiş zorlamalar için nötr eksenini

Verilmiş zorlamalar  $N_x = -8 \text{ MN}$  ;  $M_y = 12 \text{ MNm}$  ;  $M_z = -2 \text{ MNm}$  için nötr eksenini (sıfır çizgisi);

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y = 0 \text{ formülünü ele alıp değerleri yerleştirelim:}$$

$$\sigma_x = \frac{-8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} + \frac{12 \cdot 10^9}{2,459 \cdot 10^{12}} \cdot z - \frac{-2 \cdot 10^9}{0,794 \cdot 10^{12}} \cdot y = 0$$

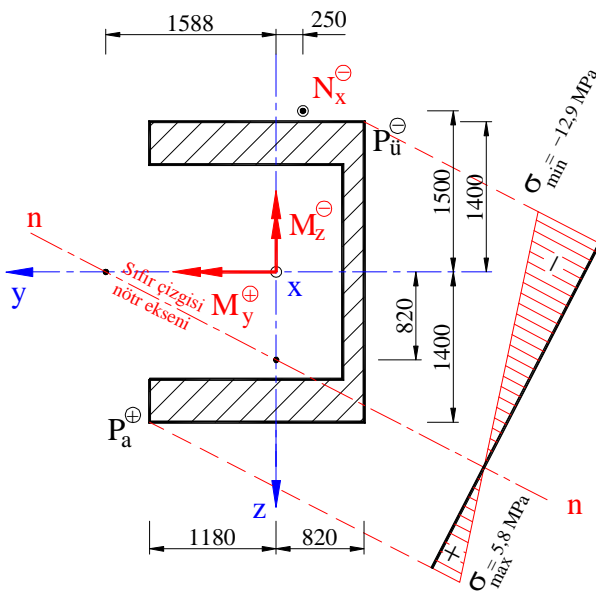
buradan nötr eksenini (sıfır çizgisi) nin formülü bulunur.

$$-4 + 4,880 \cdot 10^3 \cdot z + 2,519 \cdot 10^{-3} \cdot y = 0$$

Burada:  $y = 0$  olursa  $\Rightarrow z = 820 \text{ mm}$ ,  
 $z = 0$  olursa  $\Rightarrow y = 1588 \text{ mm}$  olur.

### 9.4. Verilmiş zorlamalar için max/min gerilmeler

Burada önce normal kuvvet " $N_x$ " in koordinatlarını bulalım



Şekil 9-03, Nötr eksenini ve gerilmeler

$$M_y = N_x \cdot z_{N_x} \text{ eşitliğinden}$$

$$z_{N_x} = \frac{M_y}{N_x} = \frac{12 \cdot 10^9}{-8 \cdot 10^6} \\ \underline{\underline{z_{N_x} = -1500 \text{ mm}}}$$

$$M_z = -N_x \cdot y_{Ager} \text{ eşitliğinden}$$

$$y_{N_x} = -\frac{M_z}{N_x} = -\frac{-2 \cdot 10^9}{-8 \cdot 10^6} \quad \underline{\underline{y_{N_x} = -250 \text{ mm}}}$$

bulunur.

Verilmiş zorlamaları, nötr eksenini (sıfır çizgisi) ni ve  $N_x$  i çizelim, Şekil 9-03.

Nötr eksenine en uzak noktaların koordinatları:  
 $P_a (1180, 1400)$  ve  $P_u (-820, -1400)$



Bu noktalardaki normal gerilmeler:

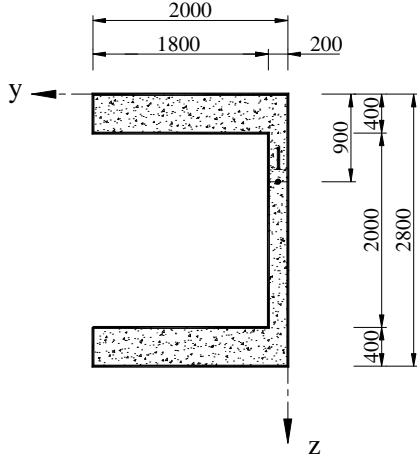
$$\sigma_{x(\text{Pa})} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_{\text{Pa}} - \frac{M_z}{J_z} \cdot y_{\text{Pa}} = -4 + 4,880 \cdot 10^3 \cdot 1400 + 2,519 \cdot 10^{-3} \cdot 1180$$

$$\underline{\underline{\sigma_{x(\text{Pa})} = 5,8 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{x(\text{Pü})} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_{\text{Pü}} - \frac{M_z}{J_z} \cdot y_{\text{Pü}} = -4 - 4,880 \cdot 10^3 \cdot 1400 - 2,519 \cdot 10^{-3} \cdot 820$$

$$\underline{\underline{\sigma_{x(\text{Pü})} = -12,9 \text{ MPa}}}$$

## 10. Yatık U-profilin analizi



Şekil 10, Yatık U-profil

Şekil 10 ile ölçüleri verilen tahtadan yatık U-profilin analizi.

### Bilinenler:

Kesit değerleri:  $V_z = 0,3 \text{ MN}$

### Arananlar:

$V_z$  nin zorlamasından oluşan:

- 1 Kesitteki kesme gerilmesi,
- 2 1 numaralı noktada oluşan kesme gerilmesi,
- 3 Sıfır çizgisi (Nötr eksen)
- 4  $N_x$ ;  $M_y$ ;  $M_z$  ye göre max ve min gerilmeleri.

### Çözüm:

#### 10.1. Kesitteki kesme gerilmesi

Kesitteki kesme gerilmesi

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_{yP_i}}{t_{Ku} \cdot J_y}$$

Burada y-eksenine göre atalet momenti:

$$J_y = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2000 \cdot 2800^3}{12} - \frac{1800 \cdot 2000^3}{12}$$

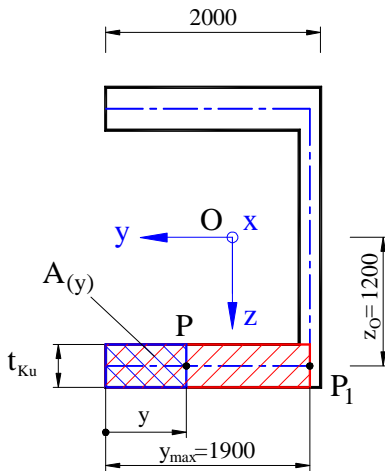
$$J_y = 2,459 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4$$

Hesapları kolaylaştırmak için kesiti ince cidarlı kabul edelim.

y-eksenine göre statik moment:

$$S_{yP_i} = \int_{z_O}^{z_P} z \cdot b_{P_i} \cdot dz$$

#### Alt kuşakta kesme gerilmesi:



Şekil 10-01, Alt kuşakta kesme gerilmesi

$z_O = 0$  ise y-eksenine göre statik momentin maksimum olduğunu her zaman hatırlayalım:

$$S_{y,\max} = S_{y(z_O=0)}$$

Şekil 10-01 ile alt kuşakta kesme gerilmesinin statik momentinin nasıl hesaplanacağı görülür.

Statik moment y değeri ile orantılıdır ve y nin maksimum değeri dikmenin ortasına kadardır.

$$S_y = A_{(y)} \cdot z_O = t_{Ku} \cdot y \cdot z_O$$

$$S_{\max} = t_{Ku} \cdot y_{\max} \cdot z_O$$

Burada b ve  $z_S$  sabit olduğundan ve z lineer arttığı için  $\tau_{yx}$  de lineer olarak dağılır.

$$z_O = 1200 \text{ mm} \quad ; \quad t_{Ku} = 400 \text{ mm} \quad ; \quad y_{\max} = 1900 \text{ mm}$$

$$S_{P1\max} = 400 \cdot 1900 \cdot 1200 = 0,912 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{P1\max} = \frac{V_z \cdot S_{P1\max}}{t_{Ku} \cdot J_y}$$

$$\tau_{P1\max} = \frac{0,3 \cdot 10^6 \cdot 0,912 \cdot 10^9}{400 \cdot 2,459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0,278 \text{ MPa}}}$$

$$S_{P1\min} = 400 \cdot 0 \cdot 1200 = 0$$

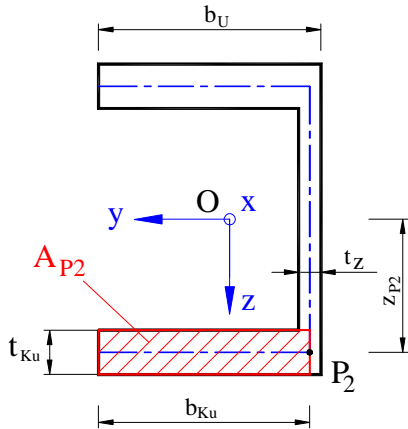
$$\tau_{P1\min} = \frac{V_z \cdot S_{P1\min}}{t_{Ku} \cdot J_y}$$

$$\tau_{P1\min} = 0$$

Burada  $t_{Ku}$  ve  $z_O$  sabit olduğundan kesme gerilmesi doğrusal olarak büyür.bkz Şekil 10-04.  
Üst kuşaktada dağılım simetriden dolayı aynıdır.

### 10.1.1. Kesitte idealize edilmiş kesme gerilmelerinin dağılımı

***P2 noktasında kesme gerilmesi, P2 noktası dikmede kabul edilirse:***



$$S_{P2} = A_{P2} \cdot z_{P2} = t_{Ku} \cdot b_{Ku} \cdot z_{P2}$$

$$z_{P2} = 1200 \text{ mm} \quad ; \quad t_{Ku} = 400 \text{ mm}$$

$$t_z = 200 \text{ mm}$$

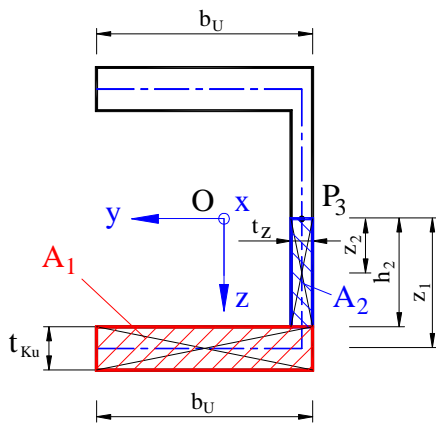
$$S_{P2} = 400 \cdot 1900 \cdot 1200 = 0,912 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_{P2}}{t_z \cdot J_y}$$

$$\tau_{P2} = \tau_{zx \min} = \frac{0,3 \cdot 10^6 \cdot 0,912 \cdot 10^9}{200 \cdot 2,459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0,556 \text{ MPa}}}$$

Şekil 10-02, P<sub>2</sub> noktasında kesme gerilmesi

***P3 noktasında kesme gerilmesi:***



$$S_{P3} = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 = t_{Ku} \cdot b_U \cdot z_1 + t_z \cdot h_2 \cdot z_2$$

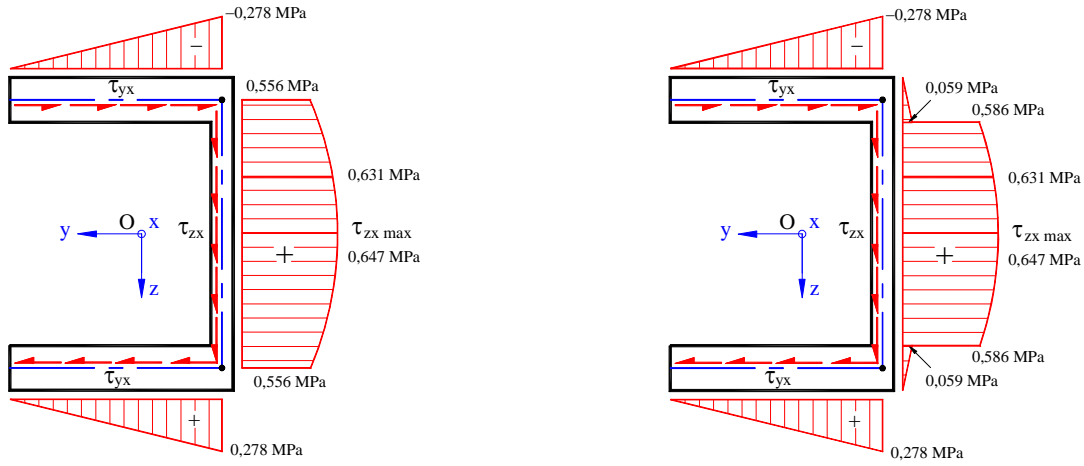
$$S_{P3} = 400 \cdot 2000 \cdot 1200 + 200 \cdot 1000 \cdot 500$$

$$S_{P3} = 1,060 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_{P3}}{t_z \cdot J_y}$$

$$\tau_{P3} = \tau_{zx \max} = \frac{0,3 \cdot 10^6 \cdot 1,060 \cdot 10^9}{200 \cdot 2,459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0,647 \text{ MPa}}}$$

Şekil 10-03, P<sub>3</sub> noktasında kesme gerilmesi



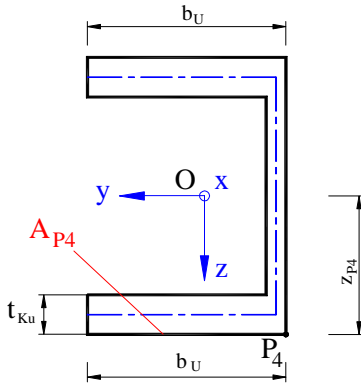
a) İdealize edilmiş kesme gerilmesinin dağılımı      b) Kesme gerilmelerinin gerçek dağılımı

Şekil 10-04, Kesitte kesme gerilmelerinin dağılımı

Kesme gerilmesi  $\tau$  pozitif, eğer düzlem dikmesi ve  $\tau$  eksenin pozitif yönünde ise.

### 10.1.2. Kesme gerilmelerinin gerçek dağılımı

***P4 noktasında kesme gerilmesi:***



$$S_{P4} = A_{P4} \cdot z_{P4} = t_{Ku} \cdot b_U \cdot z_{P4}$$

$$z_{P4} = 1400 \text{ mm} \quad ; \quad t_{Ku} = 0 \text{ mm}$$

$$t_z = 2000 \text{ mm}$$

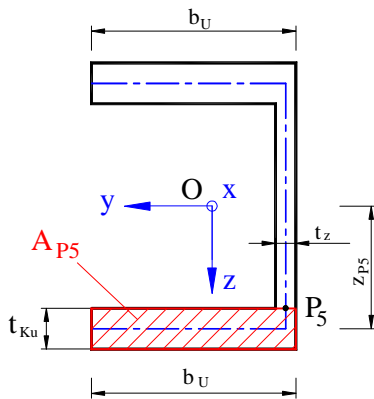
$$S_{P4} = 0 \cdot 2000 \cdot 1200 = 0 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{P4} = \tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_{P4}}{t_z \cdot J_y}$$

$$\tau_{P4} = \tau_{zx} = \underline{0 \text{ MPa}}$$

Şekil 10-05, P4 noktasında kesme gerilmesi

***P5 noktasında kesme gerilmesi, P5 noktası dikmede kabul edilirse:***



$$S_{P5} = A_{P5} \cdot z_{P5} = t_{Ku} \cdot b_U \cdot z_{P5}$$

$$z_{P5} = 1200 \text{ mm} \quad ; \quad t_{Ku} = 400 \text{ mm}$$

$$t_z = 200 \text{ mm}$$

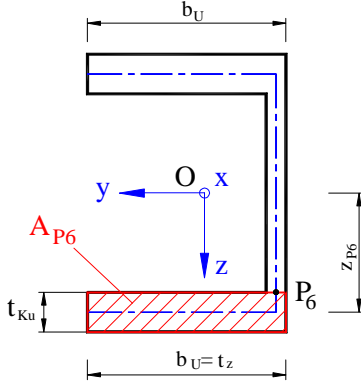
$$S_{P5} = 400 \cdot 2000 \cdot 1200 = 0,960 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_{P5}}{t_z \cdot J_y}$$

$$\tau_{P4} = \tau_{zx} = \frac{0,3 \cdot 10^6 \cdot 0,960 \cdot 10^9}{200 \cdot 2,459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0,586 \text{ MPa}}}$$

Şekil 10-06, P4 noktasında kesme gerilmesi

**P6 noktasında kesme gerilmesi, P6 noktası kuşakta kabul edilirse:**



Şekil 10-07, P6 noktasında kesme gerilmesi

$$S_{P6} = A_{P6} \cdot z_{P6} = t_{Ku} \cdot b_U \cdot z_{P6}$$

$$z_{P6} = 1200 \text{ mm} \quad ; \quad t_{Ku} = 400 \text{ mm}$$

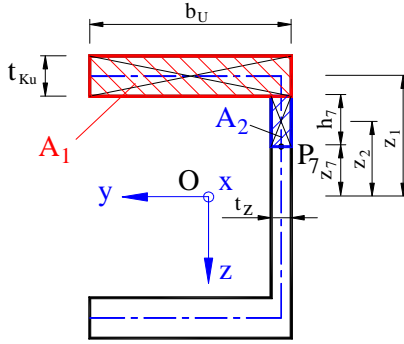
$$t_z = b_U = 2000 \text{ mm}$$

$$S_{P6} = 400 \cdot 2000 \cdot 1200 = 0,960 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_{P6}}{b_U \cdot J_y}$$

$$\tau_{P6} = \tau_{zx} = \frac{0,3 \cdot 10^6 \cdot 0,960 \cdot 10^9}{2000 \cdot 2,459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0,0586 \text{ MPa}}}$$

**P7 noktasında kesme gerilmesi:**



Şekil 10-08, P7 noktasında kesme gerilmesi

$$S_{P7} = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 = t_{Ku} \cdot b_U \cdot z_1 + t_z \cdot h_7 \cdot z_2$$

$$z_1 = 1200 \text{ mm} \quad ; \quad t_{Ku} = 400 \text{ mm}$$

$$b_U = 2000 \text{ mm} \quad ; \quad t_z = 200 \text{ mm}$$

$$h_7 = 500 \text{ mm} \quad ; \quad z_2 = 750 \text{ mm}$$

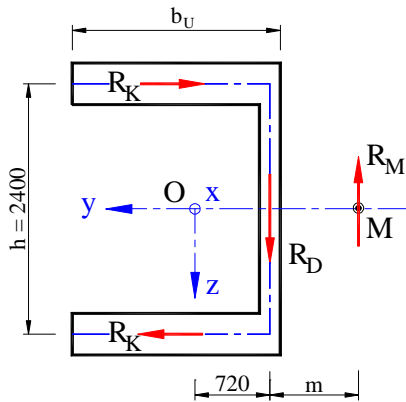
$$S_{P7} = 400 \cdot 2000 \cdot 1200 + 200 \cdot 500 \cdot 750$$

$$S_{P7} = 1,035 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_{P7}}{t_z \cdot J_y}$$

$$\tau_{P7} = \tau_{zx} = \frac{0,3 \cdot 10^6 \cdot 1,035 \cdot 10^9}{200 \cdot 2,459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0,631 \text{ MPa}}}$$

## 10.2. Torsiyon merkezi M



Şekil 10-09, Torsiyon merkezi M

Torsiyon merkezi M den geçen  $R_M$  kuvveti,  $R_K$  ve  $R_D$  kuvvetlerinin toplamına eşit karşı koyma kuvvetidir.

Kuşaktaki kesme gerilmesi için topla kuvvet:

$$R_K = 0,5 \cdot \tau_{yx \text{ max}} \cdot b_{Ku} \cdot t_{Ku}$$

$$R_K = 0,5 \cdot 0,278 \cdot 1900 \cdot 400 = \underline{\underline{105,7 \cdot 10^3 \text{ N}}}$$

$\tau_{yx}$  in doğrusal büyümesine göre.

Dikmedeki kuvveti, dikme alanının integrasyonunu yapmadan, doğrudan profili etkileyen çapraz kuvvet olarak kabul ederiz. M noktasında momentlerin toplamı sıfır olmalıdır.

$$\sum M(M) = 0 \rightarrow R_D \cdot m - R_K \cdot h = 0 \rightarrow \boxed{m = \frac{R_K \cdot h}{R_D}}$$

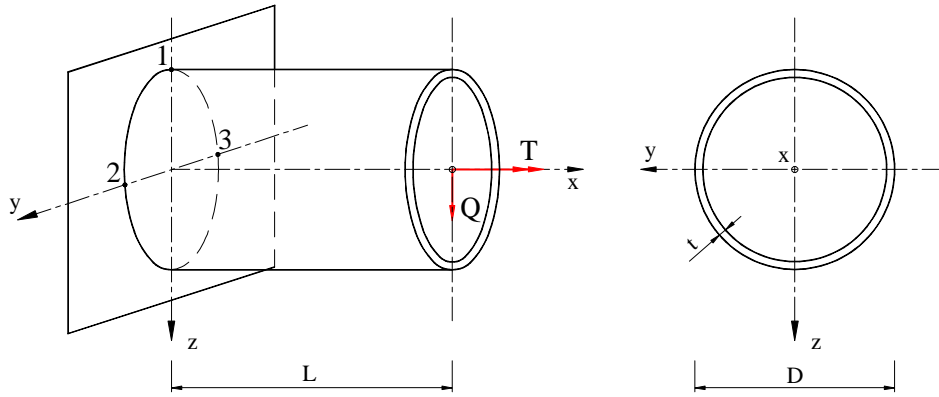
$$m = \frac{0,1057 \cdot 10^6 \cdot 2400}{0,3 \cdot 10^6}$$

$$\underline{\underline{m = 846 \text{ mm}}}$$

bulunur. Torsiyon merkezi  $M(y,z) = M(-1566,0)$

Torsiyon merkezinin yeri yorlayan kuvvetlerle değil, profilin ölçüleriyle bağıntılıdır.

## 11. Yuvarlak kaval profilli çıkma kirişin analizi



Şekil 11, Yuvarlak kaval profilli çıkma kiriş

Şekil 11 ile görülen yuvarlak borunun analizi.

### Bilinenler:

Yuvarlak boru: 219,1/6,3 (D=219,1; t=6,3) Çelik S235 (Akma mukavemeti  $R_e=235$  MPa)

Kesit değerleri:  $I_y=23,86 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$   $A=4,21 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$   $S_{\max}=142,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$

Boru boyu:  $L=2$  m

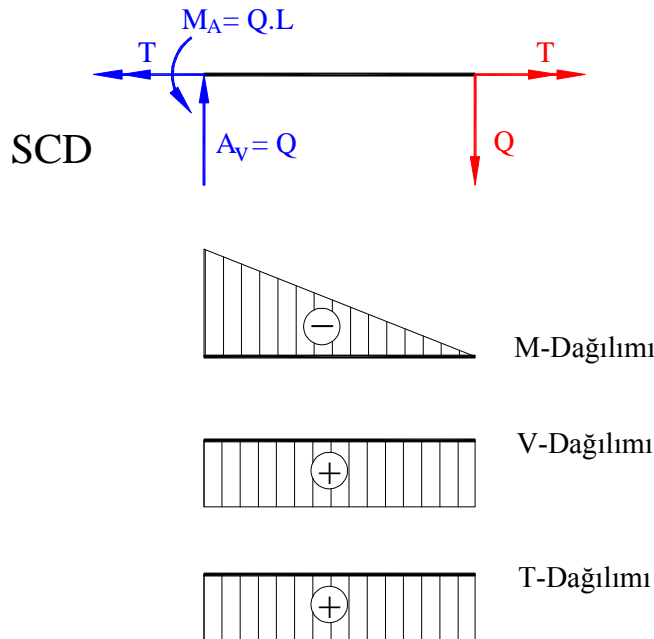
Uçta zorlamalar:  $Q=20$  kN  $T=20$  kNm

### Arananlar:

1. Profilde kesit değerleri (kendi ağırlığı dikkate alınmayacak),
2. 1, 2 ve 3 numaralı noktalarda gerilmeler,
3. Analitik ve grafik 1, 2 ve 3 numaralı noktalarda asal gerilmeler (Mohr dairesi)

### Çözüm:

#### 11.1. Profilde kesit değerleri

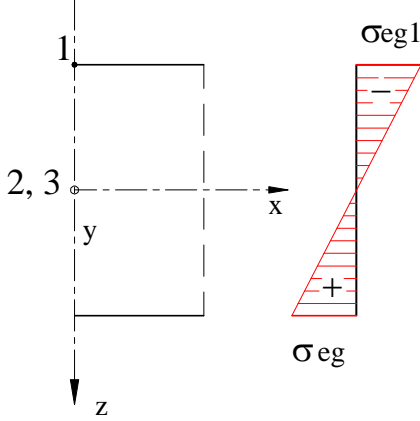


Şekil 11-01, Kesitte dağılımlar

### 11.2. 1, 2 ve 3 numaralı noktalarda gerilmeler

#### Bağlantı kesitinde normal gerilme:

Şekil 11-01 ile görülen kesitte dağılımlara bakınca  $N_x$ ,  $M_z$ ,  $V_y$  değerlerinin sıfır olduğu ve bağlantı kesitinde  $Q$  dan ötürü eğilme gerilmesinin oluşacağı bilinir.  $x$ -yönünde normal gerilme formülü:



$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{M_z}{J_z} \cdot y$$

1 numaralı noktada:

$N_x$  ve  $M_z$  sıfır ve  $z = -219,1/2$  olduğundan:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{J_y} \cdot z = \frac{-40 \cdot 10^6}{23,86 \cdot 10^6} \cdot \left( -\frac{219,1}{2} \right)$$

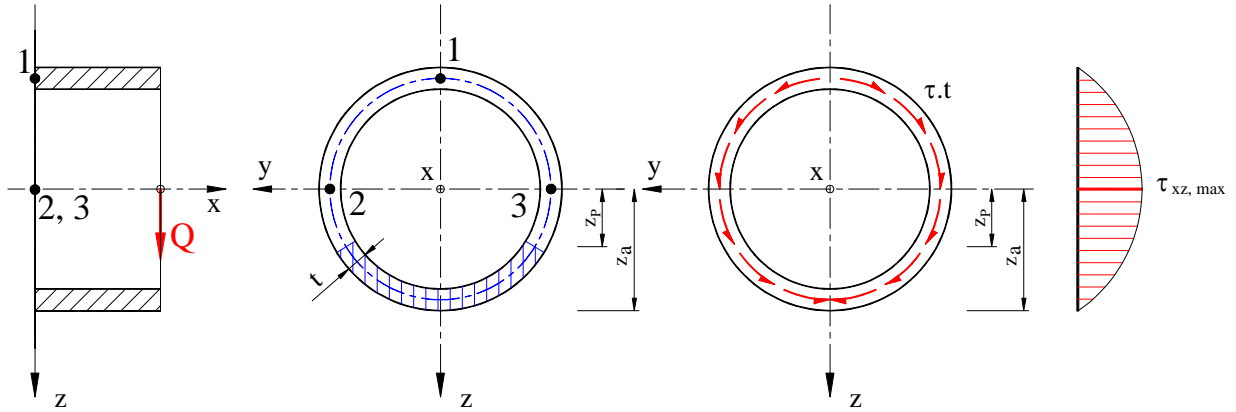
$$\underline{\sigma_{x1} = 183,7 \text{ MPa}}$$

2 ve 3 numaralı noktada,  $z = 0$  olduğundan:

$$\underline{\sigma_{x2} = 0} \quad \text{ve} \quad \underline{\sigma_{x3} = 0} \quad \text{olur}$$

Şekil 11-02, Eğilme gerilmesi

#### Bağlantı kesitinde kayma gerilmesi:



Şekil 11-03, Kesme gerilmesi

Bisquit formülü ile kesitteki kesme gerilmesini buluruz.

$$\tau_{xz}(z_s) = \frac{V_z \cdot S(z_s)}{b(z_s) \cdot J_y}$$

Ödevin bilinenleri:

Çapraz kuvvet:

$$V_z = 20 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Maksimum statik moment

$$z_s = 0$$

$$S_{\max} = 142,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

1 numaralı noktada:

$z = -219,1/2$  olduğundan  $S_1 = 0$  olur ve

$$\underline{\tau_{xz} = 0}$$

2 ve 3 numaralı noktadalar  $z = 0$  olduğundan

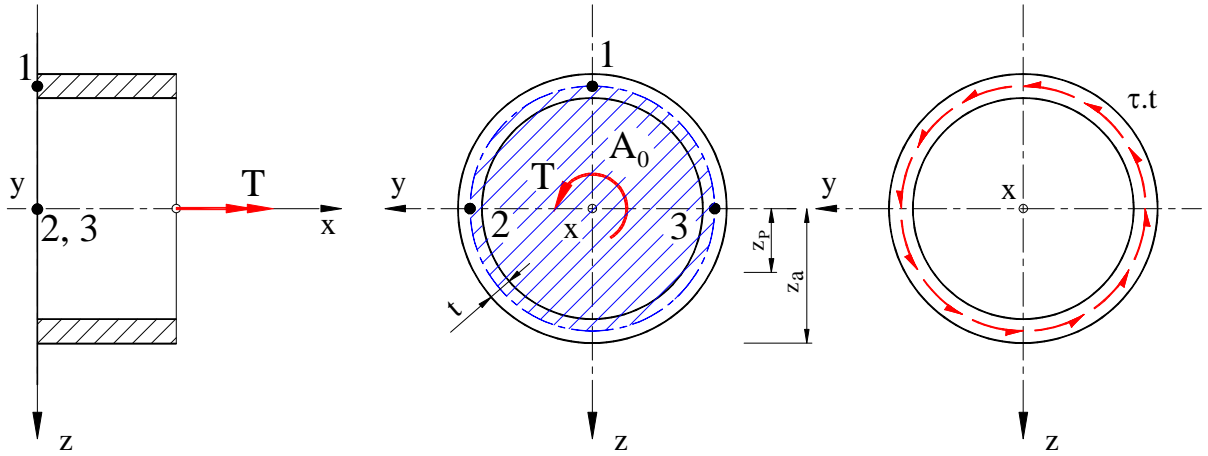
$$S_{\max} = 142,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \quad \text{olur ve:}$$

$$\tau_{xz2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 142,6 \cdot 10^3}{(2 \cdot 6,3) \cdot 23,86 \cdot 10^6} = \underline{9,5 \text{ MPa}} \quad \text{ve} \quad \tau_{xz3} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 142,6 \cdot 10^3}{(2 \cdot 6,3) \cdot 23,86 \cdot 10^6} = \underline{9,5 \text{ MPa}} \quad \text{olur.}$$

**Bağlantı kesitinde torsiyon gerilmesi:**

Bilinenler ve kabuller:

- St.Venant-dönme torsiyonu,
- $t/D$  küçük ince cidarlı kaval profil,
- $T$  den oluşan  $\tau$  cidar ortasında ve cidara eşit yayılmış,
- Normal gerilme  $\sigma_x$  yok,
- Kayma gerilmesi akım  $\tau \cdot t$  sabit,
- Bredt formülü geçerli.

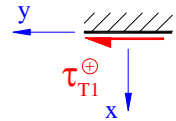


Şekil 11-04, Torsiyon gerilmesi

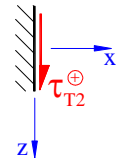
St.Venant-dönme torsiyonu:  $\tau_T = \frac{T}{W_t}$       Bredt e göre  $W_t \approx 2 \cdot A_0 \cdot t$        $\tau_T = \frac{T}{2 \cdot A_0 \cdot t}$

Bredt alanı:  $A_0 = \pi \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{219,1-6,3}{2}\right)^2 = 35,566 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$

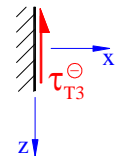
1 numaralı noktada:  $\tau_{T1} = \frac{20 \cdot 10^6}{2 \cdot 35,566 \cdot 10^3 \cdot 6,3} = \underline{\underline{44,6 \text{ MPa}}}$



2 numaralı noktada:  $\tau_{T2} = \frac{20 \cdot 10^6}{2 \cdot 35,566 \cdot 10^3 \cdot 6,3} = \underline{\underline{44,6 \text{ MPa}}}$



3 numaralı noktada:  $\tau_{T3} = -\frac{20 \cdot 10^6}{2 \cdot 35,566 \cdot 10^3 \cdot 6,3} = \underline{\underline{-44,6 \text{ MPa}}}$





### 11.3. Analitik ve grafik 1, 2 ve 3 numaralı noktalarda asal gerilmeler (Mohr dairesi)

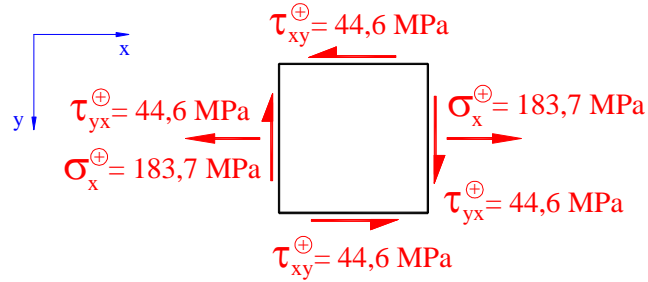
#### 11.3.1. Analitik ve grafik 1 numaralı noktada asal gerilmeler

1 numaralı noktada değerler ve elemanda gösterilmesi:

$$\sigma_{x1} = 183,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y1} = 0$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_T = 44,6 \text{ MPa}$$



Şekil 11-05, 1 numaralı noktada değerler

#### 11.3.1.1. Analitik olarak 1 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{183,7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{183,7}{2}\right)^2 + 44,6^2}$$

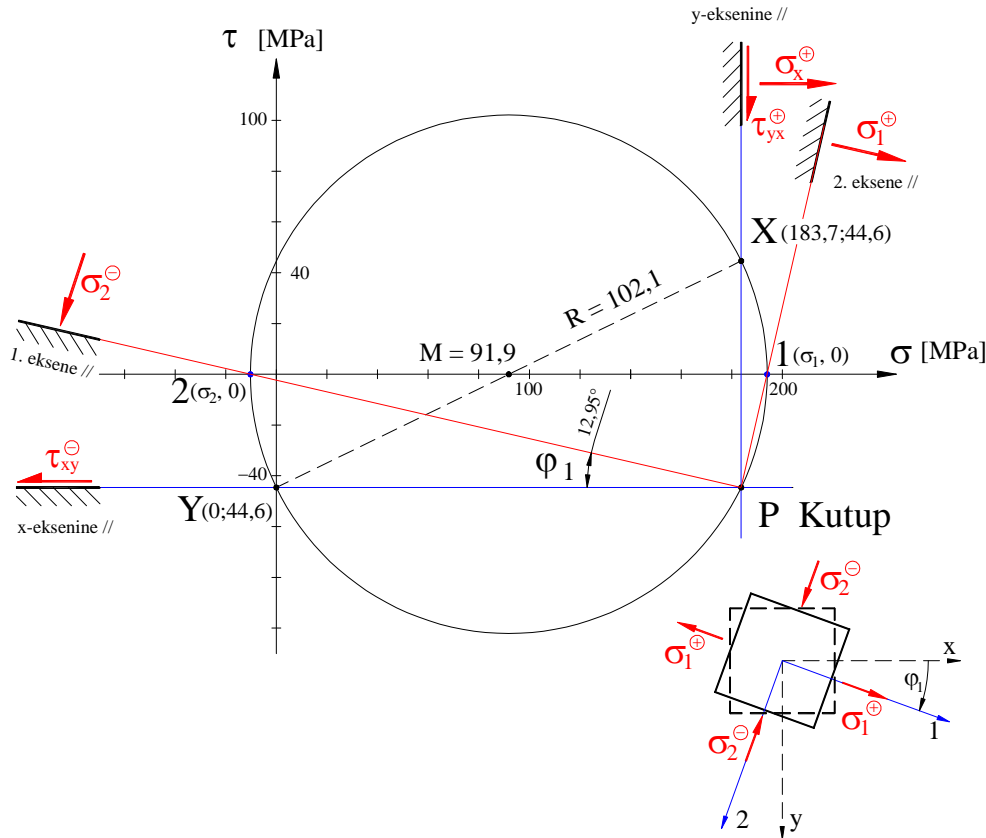
$$\underline{\underline{\sigma_1 = 194,0 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 = -10,3 \text{ MPa}}}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 44,6}{183,7} = 0,486$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = 12,95^\circ}}$$

#### 11.3.1.2. Grafik olarak 1 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri



Şekil 11-06 dan okunanlar:

$$\underline{\underline{\sigma_1 \approx 194 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 \approx -10 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = 12,95^\circ}}$$

Şekil 11-06, 1 numaralı nokta için Mohr dairesi

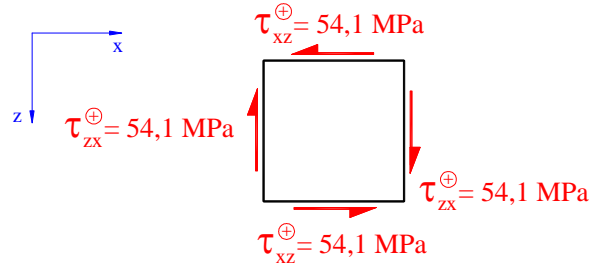
### 11.3.2. Analitik ve grafik 2 numaralı noktada asal gerilmeler

2 numaralı noktada değerler ve elemanda gösterilmesi:

$$\sigma_{x2} = 0$$

$$\sigma_{y2} = 0$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \tau_{xz} = \tau_{xz(V)} + \tau_T \\ &= 9,5 + 44,6 = 54,1 \text{ MPa}\end{aligned}$$



Şekil 11-07, 2 numaralı noktada değerler

#### 11.3.2.1. Analitik olarak 2 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{0 + 54,1^2}$$

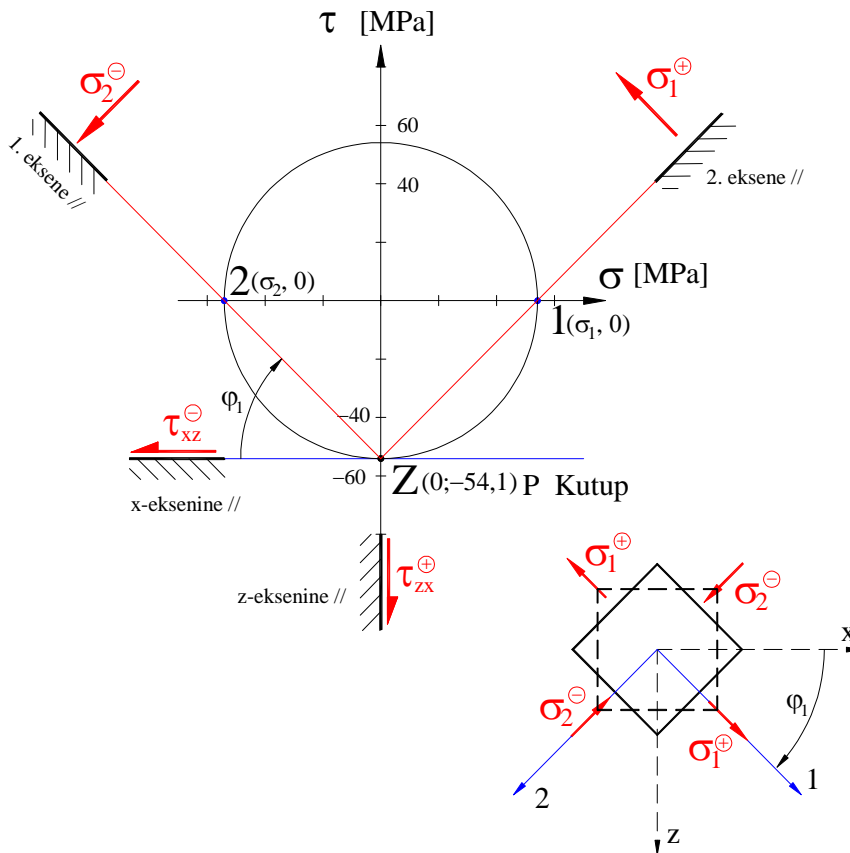
$$\underline{\underline{\sigma_1 = 54,1 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 = -54,1 \text{ MPa}}}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 54,1}{0} = \infty$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = 45^\circ}}$$

#### 11.3.2.2. Grafik olarak 2 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri



Şekil 11-06 dan okunanlar:

$$\underline{\underline{\sigma_1 \approx 54,1 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 \approx -54,1 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = 45^\circ}}$$

Şekil 11-08, 2 numaralı nokta için Mohr dairesi

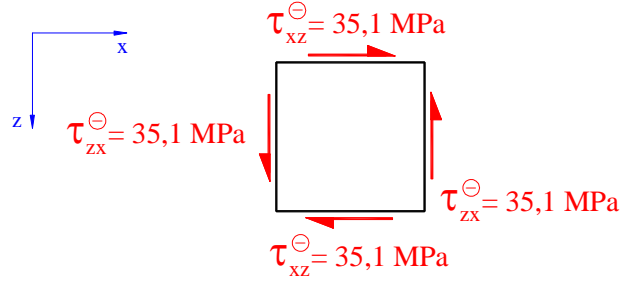
### 11.3.3. Analitik ve grafik 3 numaralı noktada asal gerilmeler

3 numaralı noktada değerler ve elemanda gösterilmesi:

$$\sigma_{x3} = 0$$

$$\sigma_{y3} = 0$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \tau_{xz} = \tau_{xz(V)} + \tau_T \\ &= 9,5 - 44,6 = 35,1 \text{ MPa}\end{aligned}$$



Şekil 11-09, 3 numaralı noktada değerler

#### 11.3.3.1. Analitik olarak 3 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{0 + (-35,1)^2}$$

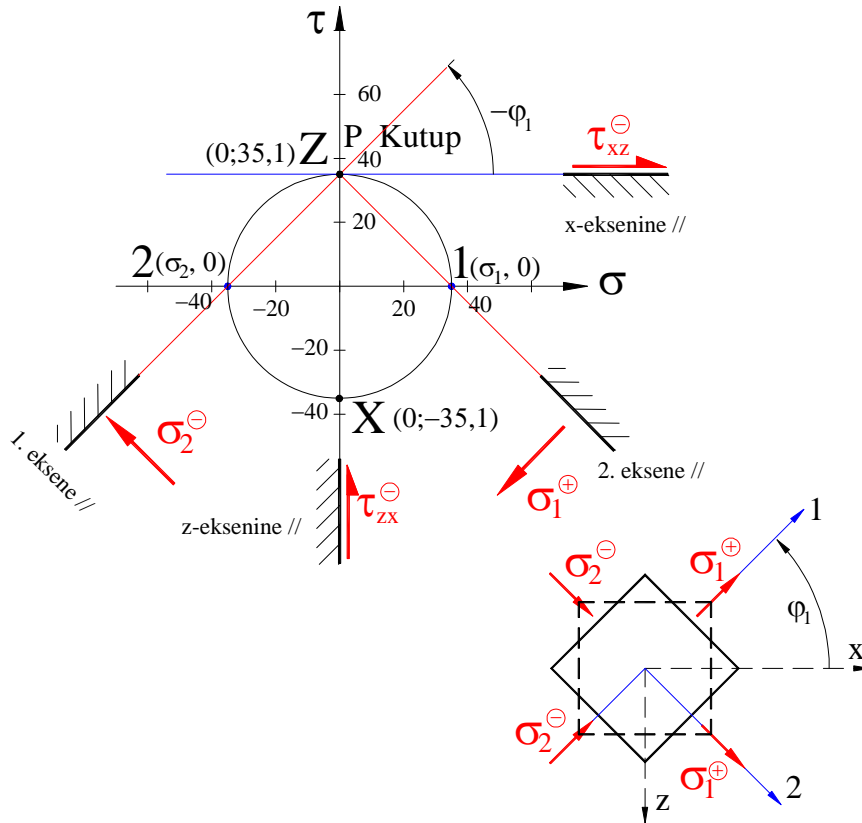
$$\underline{\underline{\sigma_1 = 35,1 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 = -35,1 \text{ MPa}}}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-35,1)}{0} = \infty$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = -45^\circ}}$$

#### 11.3.3.2. Grafik olarak 3 numaralı noktada asal gerilmeler ve yönleri



Şekil 11-06 dan okunanlar:

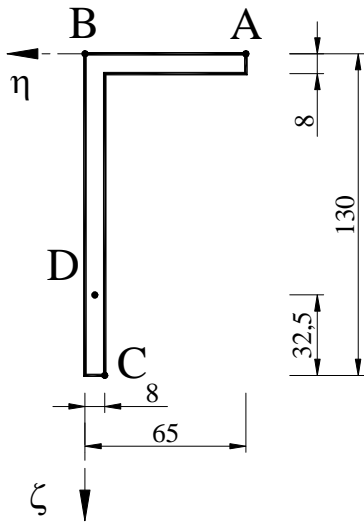
$$\underline{\underline{\sigma_1 = 35,1 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 = -35,1 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = -45^\circ}}$$

Şekil 11-10, 3 numaralı nokta için Mohr dairesi

## 12. Kesiti asimetrik profil



Şekil 12, Kesiti asimetrik profil

Şekil 12 ile ölçüleri verilen kesiti asimetrik profilin analizi.

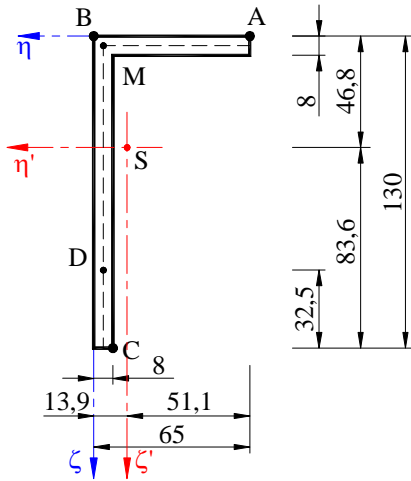
### Arananlar:

1.  $\eta$  ve  $\zeta$  eksenlerine göre ağırlık merkezi "S" ve torsiyon merkezi "M" nin yerleri,
2.  $\eta$  ve  $\zeta$  eksenlerine paralel  $\eta'$  ve  $\zeta'$  eksenlerine göre  $J_{\eta'}$  ve  $J_{\zeta'}$  atalet momentleri ile deviasyon moment  $C_{\eta'\zeta'}$ ,
3. Analitik ve grafik olarak ana ağırlık eksenleri  $y$  ve  $z$  ile bunlara göre atalet momentleri  $J_y$  ve  $J_z$  nin hesabı (atalet momentleri Mohr dairesi ile),
4. Kesitin çekirdeği,
5.  $M_{\eta'} = 5$  kNm için nötr ekseninin bulunması,
6.  $M_{\eta'} = 5$  kNm için A, B ve C deki  $\sigma_x$  gerilmeler,
7.  $V_{\zeta'} = 25$  kN için D deki  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesi,
8. Akma mukavemeti  $f_y = 235$  MPa için moment  $M_{\eta'}$  nin maksimum değeri.

### Çözüm:

#### 12.1. Ağırlık merkezi "S" ve torsiyon merkezi "M" nin koordinatları:

##### Ağırlık merkezi "S" nin koordinatları:



Kesit alanı:

$$A = 8 \cdot (130 + 57) = 1496 \text{ mm}^2$$

Ağırlık merkezi "S" nin koordinatları:

$$\eta_S = \frac{8 \cdot 130 \cdot (-4) + 8 \cdot 57 \cdot (-36,5)}{1496} \quad \underline{\eta_S = -13,9 \text{ mm}}$$

$$\zeta_S = \frac{8 \cdot 130 \cdot 65 + 8 \cdot 57 \cdot 4}{1496} \quad \underline{\zeta_S = 46,4 \text{ mm}}$$

Böylece ağırlık merkezi "S" nin koordinatları:

$$\boxed{S(\eta; \zeta) = S(-13,9; 46,4)}$$

Şekil 12-01, Asimetrik profil

olarak bulunur Şekil 12-01.

##### Torsiyon merkezi "M" nin koordinatları:

L-profillerinde torsiyon merkezi kenar eksenlerinin kesiştiği noktadır, Şekil 12-01.

$$\boxed{M(\eta; \zeta) = M(-4; 4)}$$

#### 12.2. Atalet momentleri $J_{\eta'}$ ve $J_{\zeta'}$ ile deviasyon moment $C_{\eta'\zeta'}$ :

Atalet momentleri için gereken değerler, Şekil 12-02.

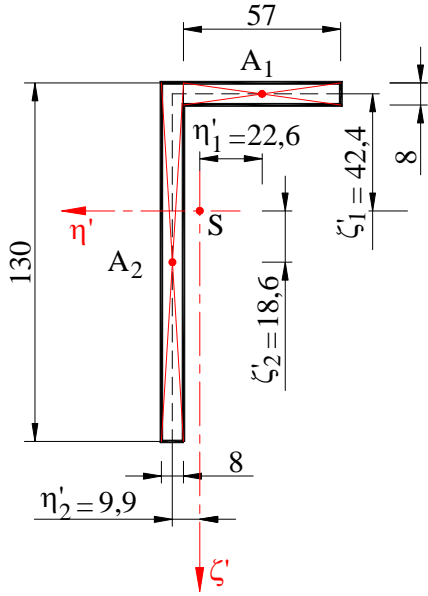
$$A_1 = 57 \cdot 8 = 456 \text{ mm}^2 \quad ; \quad \eta'_1 = 65 - 13,9 - 28,5 = 22,6 \quad ; \quad \zeta'_1 = 46,4 - 4 = 42,4$$

$$J_{1\eta} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{57 \cdot 8^3}{12} = 2432 \text{ mm}^4 \quad J_{1\zeta} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{8 \cdot 57^3}{12} = 123462 \text{ mm}^4$$

$$A_2 = 130 \cdot 8 = 1040 \text{ mm}^2 \quad ; \quad \eta'_2 = 13,9 - 4 = 9,9 \quad ; \quad \zeta'_2 = 65 - 46,4 = 18,6$$

$$J_{2\eta} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{8 \cdot 130^3}{12} = 1464667 \text{ mm}^4$$

$$J_{2\zeta} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{130 \cdot 8^3}{12} = 5547 \text{ mm}^4$$



Şekil 12-02, Gerekli değerler

Steiner'e göre:

$$J_{\eta'} = \int \zeta'^2 \cdot dA \quad J_{\eta'} = \zeta_1'^2 \cdot A_1 + J_{1\eta} + \zeta_2'^2 \cdot A_2 + J_{2\eta}$$

$$J_{\eta'} = 42,4^2 \cdot 456 + 2432 + 18,6^2 \cdot 1040 + 1464667$$

$$J_{\eta'} = 2,647 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{\zeta'} = \int \eta'^2 \cdot dA \quad J_{\zeta'} = \eta_1'^2 \cdot A_1 + J_{1\zeta} + \eta_2'^2 \cdot A_2 + J_{2\zeta}$$

$$J_{\zeta'} = 22,6^2 \cdot 456 + 123462 + 9,9^2 \cdot 1040 + 5547$$

$$J_{\zeta'} = 0,464 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

**Deviasyon momenti  $C_{\eta'\zeta'}$ :**

$$C_{\eta'\zeta'} = \int \eta' \cdot \zeta' \cdot dA \quad C_{\eta'\zeta'} = \eta_1' \cdot \zeta_1' \cdot A_1 + \eta_2' \cdot \zeta_2' \cdot A_2$$

$$C_{\eta'\zeta'} = 22,6 \cdot 42,4 \cdot 456 + 9,9 \cdot 18,6 \cdot 1040 \quad C_{\eta'\zeta'} = 0,628 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

**12.3. Ana ağırlık eksenleri y ve z vede atalet momentleri  $J_y$  ve  $J_z$** **12.3.1. Analitik olarak**

$$J_{y,z} = \frac{J_{\eta'} + J_{\zeta'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{\eta'} - J_{\zeta'}}{2}\right)^2 + C_{\zeta'\eta'}^2} \quad \text{burada değerleri yerleştirelim.}$$

$$J_{y,z} = 10^6 \cdot \left( \frac{2,647 + 0,464}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,647 - 0,464}{2}\right)^2 + 0,628^2} \right) = 1,555 \cdot 10^6 \pm 1,259 \cdot 10^6$$

$$\text{Buradan} \quad J_y = 1,555 \cdot 10^6 + 1,259 \cdot 10^6 \quad J_y = 2,815 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_z = 1,555 \cdot 10^6 - 1,259 \cdot 10^6 \quad J_z = 0,296 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

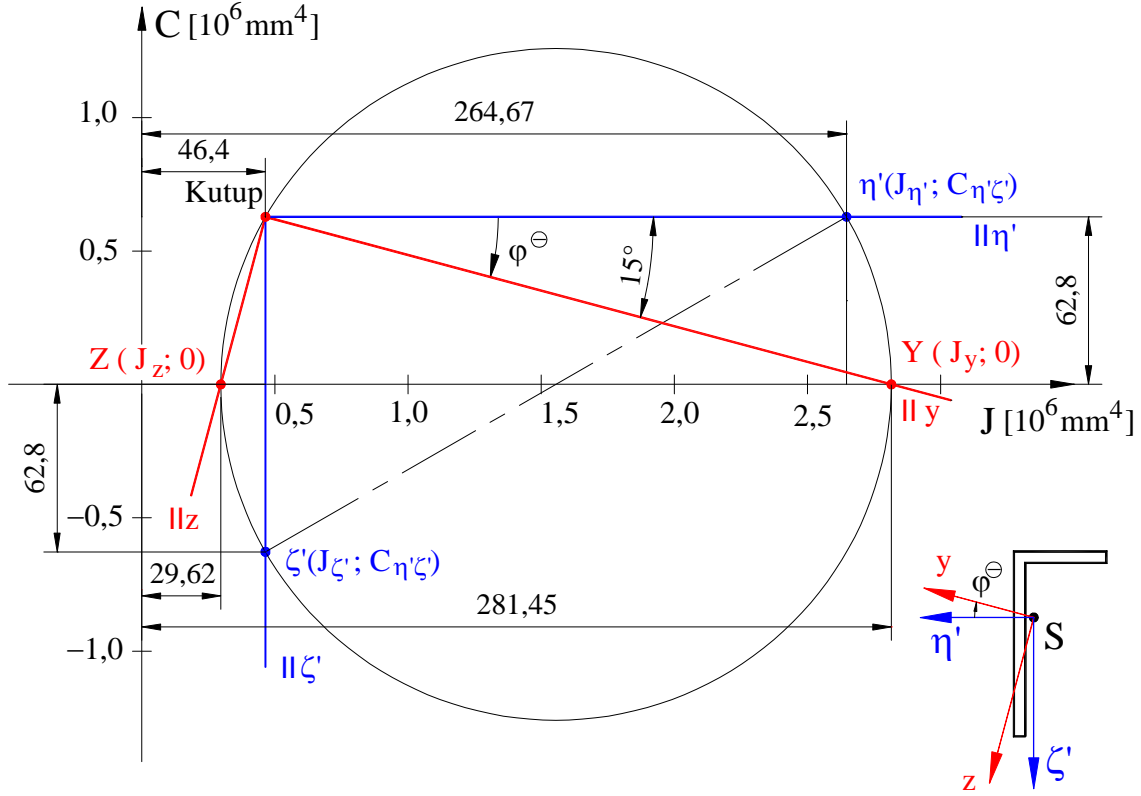
$$\tan 2\varphi = \frac{-2 \cdot C_{\zeta'\eta'}}{J_{\eta'} - J_{\zeta'}} \quad \text{burada değerleri yerleştirelim.}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{-2 \cdot 0,628}{2,647 - 0,464} = -0,5758 \quad \text{buradanda} \quad \varphi = -14,97^\circ \approx -15^\circ$$

### 12.3.2. Grafik olarak Mohr daresiyle

Arananları çizimle bulmak için koordinat eksenleri; x-ekseni olarak atalet momenti J ve y-ekseni olarak deviasyon momenti C olan koordinatlar sistemini  $100 \text{ mm} = 1.10^6 \text{ mm}^4$  ölçekli olarak çizelim, Şekil 12-03.

Buraya  $\eta'$  ve  $\zeta'$  noktalarını taşıyalım. Bu noktalardan geçen Mohr daresini çizelim.



Şekil 12-03, Mohr daresiyle atalet momentleri

$\eta'$  ve  $\zeta'$  noktalarından J ve C eksenlerine paraleller çizersek bu paralellerin Mohr daresini kestiği nokta bize kutup noktasını verir. Mohr daresinin J eksenini kestiği noktalar bize y ve z eksenlerine göre atalet momentlerini verir, Y ( $J_y ; 0$ ) ve Z ( $J_z ; 0$ ). Kutup noktasını Y ve Z noktalarıyla birleştirebilirsek y ve z eksenlerini buluruz. Burada aradığımız değerleri ölçerek bulabiliriz.

Atalet momenti  $J_y \approx 2,815 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$J_z \approx 0,296 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$\varphi$  açısı  $\varphi \approx 15^\circ$

### 12.4. Kesitin çekirdeği:

Çekirdek noktalarını hesaplayan formülleri hatırlayalım:

**a) n-n nötr eksenini  $\eta'$  eksenine paralel ise:**

$$P (\eta'_P = \pm\infty, 0) \text{ ve } Q (0, \zeta'_Q) \text{ için} \quad \eta'_A = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A} \quad ; \quad \zeta'_A = -\frac{J_{\eta'}}{\zeta'_Q \cdot A}$$

**b) n-n nötr eksenini  $\zeta'$  eksenine paralel ise:**

$$P (\eta'_P, 0) \text{ ve } Q (0, \zeta'_Q = \pm\infty) \text{ için} \quad \eta'_A = -\frac{J_{\zeta'}}{\eta'_P \cdot A} \quad ; \quad \zeta'_A = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}$$

Burada şunu tekrar hatırlayalım:  $\eta'_A$  ve  $\zeta'_A$  çekirdek kenar noktaları,  $\eta'$  ve  $\zeta'$  nötrekseni noktalarıdır.

Nötr eksen üst kenar boyunca, eksen 1-1  $P(\eta'_P, 0) = (\pm\infty, 0)$   
 $Q(0, \zeta'_Q) = (0, -46,4)$

$$\eta'_{A1} = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A} \quad \eta'_{A1} = -\frac{0,628 \cdot 10^6}{(-46,4) \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\eta'_{A1} = 9,1 \text{ mm}}}$$

$$\zeta'_{A1} = -\frac{J_{\eta'}}{\zeta'_Q \cdot A} \quad \zeta'_{A1} = -\frac{2,647 \cdot 10^6}{(-46,4) \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\zeta'_{A1} = 38,1 \text{ mm}}}$$

Nötr eksen alt kenar boyunca, eksen 2-2  $P(\eta'_P, 0) = (\pm\infty, 0)$   
 $Q(0, \zeta'_Q) = (0, 83,6)$

$$\eta'_{A2} = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A} \quad \eta'_{A2} = -\frac{0,628 \cdot 10^6}{83,6 \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\eta'_{A2} = -5,0 \text{ mm}}}$$

$$\zeta'_{A2} = -\frac{J_{\eta'}}{\zeta'_Q \cdot A} \quad \zeta'_{A2} = -\frac{2,647 \cdot 10^6}{83,6 \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\zeta'_{A2} = -21,2 \text{ mm}}}$$

Nötr eksen sol kenar boyunca, eksen 3-3  $P(\eta'_P, 0) = (13,9, 0)$   
 $Q(0, \zeta'_Q) = (0, \pm\infty)$

$$\eta'_{A3} = -\frac{J_{\zeta'}}{\eta'_P \cdot A} \quad \eta'_{A3} = -\frac{0,464 \cdot 10^6}{13,9 \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\eta'_{A3} = -22,3 \text{ mm}}}$$

$$\zeta'_{A3} = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A} \quad \zeta'_{A3} = -\frac{0,628 \cdot 10^6}{13,9 \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\zeta'_{A3} = -30,2 \text{ mm}}}$$

Nötr eksen sağ kenar boyunca, eksen 4-4  $P(\eta'_P, 0) = (-51,1, 0)$   
 $Q(0, \zeta'_Q) = (0, \pm\infty)$

$$\eta'_{A4} = -\frac{J_{\zeta'}}{\eta'_P \cdot A} \quad \eta'_{A4} = -\frac{0,464 \cdot 10^6}{(-51,1) \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\eta'_{A4} = 6,1 \text{ mm}}}$$

$$\zeta'_{A4} = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A} \quad \zeta'_{A4} = -\frac{0,628 \cdot 10^6}{(-51,1) \cdot 1496} \quad \underline{\underline{\zeta'_{A4} = 8,2 \text{ mm}}}$$

Nötr eksen C ve E noktalarını birleştiren doğru, eksen 5-5  
 $C(5,9; 83,6)$  ve  $E(-51,1; -38,4)$

Nötr ekseninin denklemi, eksen 5-5:

$$\boxed{\zeta' = 2,1404 \cdot \eta' + 70,9405}$$

$P: (\eta'_P, 0) = (-33,14; 0)$  ve  $Q(0, \zeta'_Q) = (0; 70,94)$

Nötr ekseninin genel formülü:

$$\eta'_A \cdot J_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{\eta'_P \cdot A} \quad \eta'_{A5} \cdot 2,647 - \zeta'_{A5} \cdot 0,628 = -\frac{(2,647 \cdot 0,464 - 0,628^2) \cdot 10^3}{(-33,14) \cdot 1,496}$$

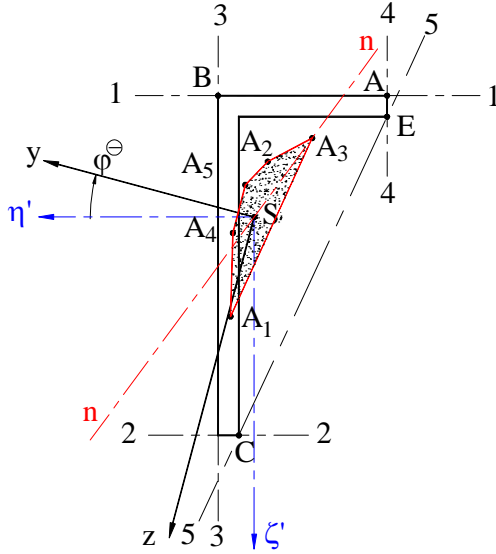
$$\zeta'_A \cdot J_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{\zeta'_Q \cdot A} \quad \zeta'_{A5} \cdot 0,464 - \eta'_{A5} \cdot 0,628 = -\frac{(2,647 \cdot 0,464 - 0,628^2) \cdot 10^3}{70,94 \cdot 1,496}$$

Buradan:

$$2,647 \cdot \eta'_{A5} - 0,628 \cdot \zeta'_{A5} = 16,7934$$

$$-0,628 \cdot \eta'_{A5} + 0,464 \cdot \zeta'_{A5} = -7,8461 \quad \text{denklemleri bulunur. Değerleri hesaplırsak:}$$

$$\underline{\underline{\eta'_{A5} = 3,4 \text{ mm}}} \quad \text{ve} \quad \underline{\underline{\zeta'_{A5} = -12,3 \text{ mm}}} \quad \text{bulunur.}$$



Şekil 12-04, Kesit çekirdeği

Koordinatlar:

A (-51,1 ; -46,4)

B (13,9 ; -46,4)

C (5,9 ; 83,6)

E (-51,1 ; -38,4)

A<sub>1</sub> (9,1 ; 38,1)

A<sub>2</sub> (-5,0 ; -21,2)

A<sub>3</sub> (-22,3 ; -30,2)

A<sub>4</sub> (6,1 ; 8,2)

A<sub>5</sub> (3,4 ; -12,3)

**12.5.  $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$  için nötr ekseninin bulunması**

Genel gerilme formülünü yazalım.

$$\sigma_x = M_{\zeta'} \cdot \frac{\eta' \cdot J_{\eta'} - \zeta' \cdot C_{\eta' \zeta'}}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta' \zeta'}^2} + M_{\eta'} \cdot \frac{\zeta' \cdot J_{\zeta'} - \eta' \cdot C_{\eta' \zeta'}}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta' \zeta'}^2} \quad \text{burada } s_x = 0 \text{ ise formülümüz nötr eksenini}$$

formülü olur. Diğer taraftan  $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$  ise,  $M_{\zeta'} = 0$  olur. Böylece nötr eksenini formülü şu şekli alır.

$$\sigma_x = M_{\eta'} \cdot \frac{\zeta' \cdot J_{\zeta'} - \eta' \cdot C_{\eta' \zeta'}}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta' \zeta'}^2} = 0 \quad \text{burada eşitlik } \zeta' \cdot J_{\zeta'} - \eta' \cdot C_{\eta' \zeta'} = 0 \text{ olursa sağlanır. Bu düşünce ile}$$

$$\zeta' = \frac{C_{\eta' \zeta'}}{J_{\zeta'}} \cdot \eta' \quad \text{değerleri } 10^6 \text{ kısaltılmasıyla yerleştirirsek} \quad \zeta' = \frac{0,628}{0,464} \cdot \eta' \quad \underline{\underline{\zeta' = 1,355 \cdot \eta'}}$$
 bulunur.

**12.6.  $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$  için A, B ve C deki  $\sigma_x$  gerilmeler**Yukarıda bulduğumuz  $\sigma_x = M_{\eta'} \cdot \frac{\zeta' \cdot J_{\zeta'} - \eta' \cdot C_{\eta' \zeta'}}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta' \zeta'}^2}$  formülünü ele alıp değerleri yerleştirelim:

$$A (-51,09 ; -46,41) \quad \sigma_A = 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{(0,464 \cdot (-46,4) - 0,628 \cdot (-51,1)) \cdot 10^6}{(2,647 \cdot 0,464) \cdot 10^6 - (0,628 \cdot 10^6)^2} \quad \underline{\underline{\sigma_A = 63,5 \text{ MPa}}}$$

 $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$  momentin A noktasında oluşturduğu normal gerilme  $\underline{\underline{\sigma_A = 63,5 \text{ MPa}}}$  dır.

$$B (13,91 ; -46,41) \quad \sigma_B = 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{(0,464 \cdot (-46,4) - 0,628 \cdot (13,91)) \cdot 10^6}{(2,647 \cdot 0,464) \cdot 10^6 - (0,628 \cdot 10^6)^2} \quad \underline{\underline{\sigma_B = -181,8 \text{ MPa}}}$$

 $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$  momentin B noktasında oluşturduğu normal gerilme  $\underline{\underline{\sigma_B = -181,8 \text{ MPa}}}$  dır.

$$C (5,91 ; 83,59) \quad \sigma_C = 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{(0,464 \cdot (83,59) - 0,628 \cdot (5,91)) \cdot 10^6}{(2,647 \cdot 0,464) \cdot 10^6 - (0,628 \cdot 10^6)^2} \quad \underline{\underline{\sigma_C = 210,5 \text{ MPa}}}$$

 $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$  momentin C noktasında oluşturduğu normal gerilme  $\underline{\underline{\sigma_C = 210,5 \text{ MPa}}}$  dır.



**12.7.  $V_{\zeta'} = 25$  kN için D deki  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesi**

Kayma gerilmesinin genel formülünü ele alalım.

$$\tau = \frac{V_{\zeta'} \cdot J_{\zeta'} \cdot S_{\eta'} - C_{\eta'\zeta'} \cdot S_{\zeta'}}{t \cdot (J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2)}$$

Statik momentler  $S_{\eta'}$  ve  $S_{\zeta'}$ :

$$S_{\eta'} = \zeta'_{AD} \cdot A_D$$

$$\zeta'_{AD} = 83,6 - 16,25 = 67,35 \text{ mm}$$

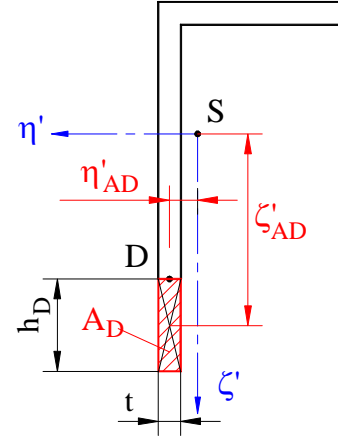
$$A_D = 32,5 \cdot 8 = 260 \text{ mm}^2$$

$$S_{\eta'} = \zeta'_{AD} \cdot A_D = 67,35 \cdot 260 = 17,511 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_{\zeta'} = \eta'_{AD} \cdot A_D$$

$$\eta'_{AD} = 13,9 - 4 = 9,9 \text{ mm}$$

$$S_{\zeta'} = \eta'_{AD} \cdot A_D = 9,9 \cdot 260 = 2,574 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$



Şekil 12-05, D noktası şeması

$$\tau_D = \frac{V_{\zeta'} \cdot J_{\zeta'} \cdot S_{\eta'} - C_{\eta'\zeta'} \cdot S_{\zeta'}}{t \cdot (J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2)} = \frac{25 \cdot 10^3}{8} \cdot \frac{0,464 \cdot 10^6 \cdot 17,511 \cdot 10^3 - 0,628 \cdot 10^6 \cdot 2,574 \cdot 10^3}{2,647 \cdot 10^6 \cdot 0,464 \cdot 10^6 - (0,628 \cdot 10^6)^2}$$

$$\tau_D = 24,393 \text{ MPa}$$

**12.8. Akma mukavemeti  $f_y = 235$  MPa için moment  $M_{\eta'}$  nin maksimum değeri.**

Normal gerilmenin Navier'e göre genel formülünden  $M_{\eta'}$  değerini ele alalım.

$$\sigma_x = M_{\eta'} \cdot \frac{J_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} \leq f_y$$

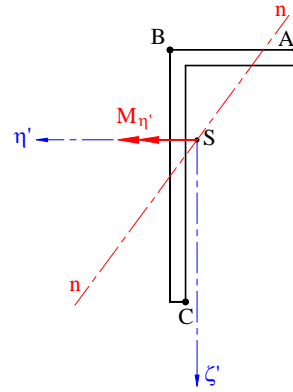
Buradan;

$$M_{\eta'} = f_y \cdot \frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{J_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}$$

$$\eta'_A = -51,1 \text{ mm} \quad \zeta'_A = -46,4 \text{ mm}$$

$$\eta'_B = 13,9 \text{ mm} \quad \zeta'_B = -46,4 \text{ mm}$$

$$\eta'_C = 5,9 \text{ mm} \quad \zeta'_C = 83,6 \text{ mm}$$



Şekil 12-06,  $M_{\eta'}$  nin maksimum değeri

$$M_{\eta'A} = f_y \cdot \frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{J_{\zeta'} \cdot \zeta'_A - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'_A}$$

$$M_{\eta'A} = 18,554 \text{ kNm}$$

$$M_{\eta'B} = f_y \cdot \frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{J_{\zeta'} \cdot \zeta'_B - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'_B}$$

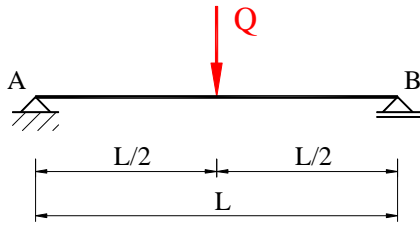
$$M_{\eta'B} = 6,476 \text{ kNm}$$

$$M_{\eta'C} = f_y \cdot \frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{J_{\zeta'} \cdot \zeta'_C - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'_C}$$

$$M_{\eta'C} = 5,585 \text{ kNm}$$

Burada C noktası bizim için alınacak değerdir.

### 13. Mohr benzerliği, ortadan tek kuvvetle zorlanan klasik kirişte sehim



Şekil 13, Klasik kirişte sehim

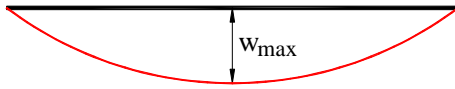
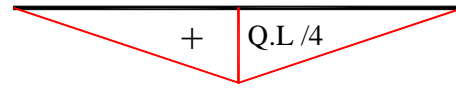
Verilenler:

Şekil 13 ile verilen sistem.

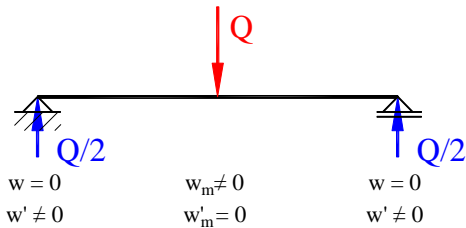
Arananlar:

Maksimum sehim formülü.

Çözüm:

Şekil 13-01, Q nun sehimini, kalitatif çizimi  
Sistemde bilinen ve analog kiriş:

Şekil 13-02, Q dan oluşan moment dağılımı

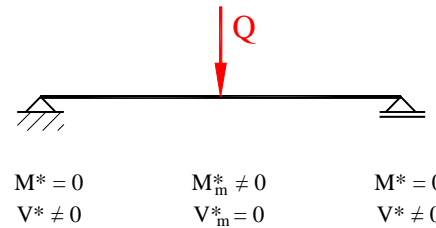


Şekil 13-03, Bilinen kiriş

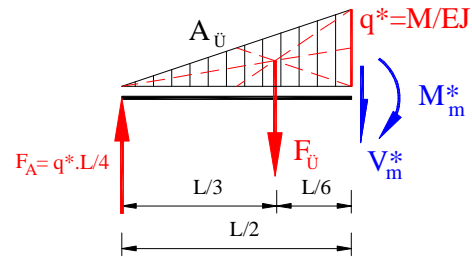
Analog kirişin momentle zorlanması:



Şekil 13-05, Analog kirişte zorlama



Şekil 13-04, Analog kiriş



Şekil 13-06, Analog kirişte moment

$$q^* = \frac{M}{E \cdot J} \quad M = \frac{Q \cdot L}{4} \quad A_{\ddot{u}} = F_{\ddot{u}} = F_A = q^* \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad F_{\ddot{u}} = F_A = \frac{q^* \cdot L}{4}$$

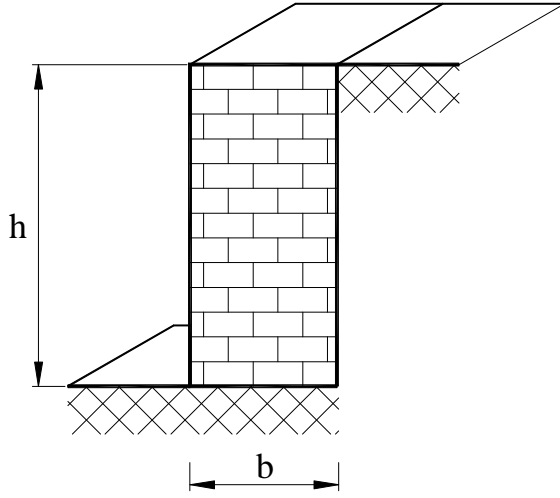
$$q^* = \frac{Q \cdot L}{4 \cdot E \cdot J} \quad F_A = \frac{Q \cdot L}{4 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{L}{4} \quad \boxed{F_A = \frac{Q \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot J}} \quad w = M^* = F_A \cdot \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{6} \right) \quad \boxed{w = F_A \cdot \frac{L}{3}}$$

Maksimum moment maksimum sehime eşittir:

$$w_{\max} = \frac{Q \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{L}{3}$$

$$w_{\max} = \frac{Q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

## 14. Duvarın zorlanması



Şekil 14, Duvarın zorlanması

**Bilinenler:**

Şekil 14 ile görülen duvarın boyu sonsuz uzun;  
 Hesaplarda duvar boyu  $L_{Du} = 1$  m,  
 Eni  $b_{Du} = 1$  m,  
 Yoğunluğu  $\gamma_{Du} = 12$  kN/m<sup>3</sup> ,  
 Yer/duvar emniyetli basıncı  $\sigma_{bEM} = 0,1$  MPa  
 Yerin (toprağın) yoğunluğu  $\gamma_Y = 20$  kN/m<sup>3</sup> dir.

**Arananlar:**

Yerin duvara emniyetli basıncı aşılmadan ve duvarın yerden kalkmaması için duvarın en büyük yüksekliği.

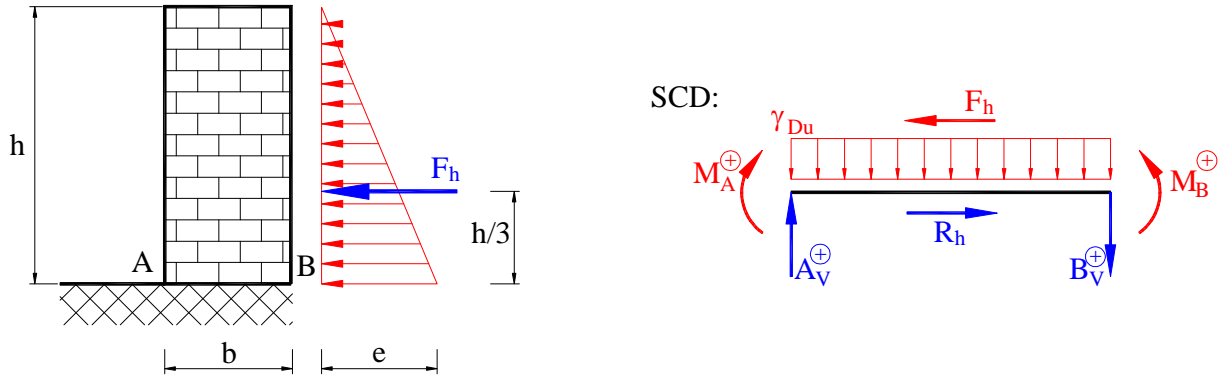
**Kabuller:**

- Çapraz kuvvet V dikkate alınmayacaktır.
- Duvar altındaki toprak basıncının dağılımı

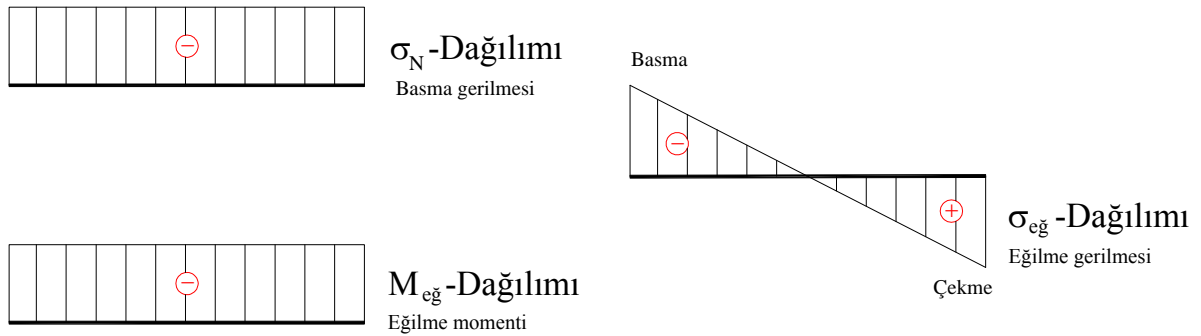
$$e_{To} = \frac{1}{3} \cdot \gamma_Y \cdot h \quad \left[ \text{kN/m}^2 \right] \text{ dir.}$$

**Çözüm:****14.1. Kesit kuvvetleri**

Şekil 14 ile verilmiş olan duvarın şemasını ve serbest cisim diyagramını çizelim.



Şekil 14 a, Duvarın zorlanması ve SCD



Şekil 14 b, Kesitte mukavemet dağılımları

**14.2. Duvarın emniyetli en büyük yüksekliği**

Bu hesap için Őu iki denklemin sađlanması gerekir:

$$I \quad \sigma_{btop} = \sigma_{eg} + \sigma_N \leq \sigma_{bEM} \quad \text{duvarın zemini ökertmemesi için.}$$

$$II \quad \sigma_{çtop} = \sigma_{eg} - \sigma_N \leq \sigma_{bEM} \quad \text{duvarın zeminden kalkmaması için}$$

**Eğilme gerilmesi**

$$\sigma_{eđ} = \frac{M_{eg}}{W_{eg}}$$

Duvar tabanının karşı koyma momenti:

$$W_{eg} = \frac{L_{Du} \cdot b_{Du}^2}{6}$$

Duvarı etkileyen yatay kuvvet:

$$F_h = \frac{1}{6} \cdot \gamma_Y \cdot h_{Du}^2 \cdot L_{Du}$$

Eğilme momenti

$$M_{eg} = F_h \cdot h_{Fh} = F_h \cdot \frac{h_{Du}}{3}$$

$$M_{eg} = \frac{1}{18} \cdot \gamma_Y \cdot L_{Du} \cdot h_{Du}^3$$

Eğilme gerilmesi

$$\sigma_{eđ} = \frac{1}{18 \cdot W_{eg}} \cdot \gamma_Y \cdot L_{Du} \cdot h_{Du}^3$$

**Normal gerilme**

$$\sigma_N = \frac{G_{Du}}{A_{Du}}$$

Duvarın ağırlık kuvveti:

$$G_{Du} = A_{Du} \cdot h_{Du} \cdot \gamma_{Du}$$

Normal gerilme

$$\sigma_N = \frac{A_{Du} \cdot h_{Du} \cdot \gamma_{Du}}{A_{Du}} \quad \boxed{\sigma_N = h_{Du} \cdot \gamma_{Du}}$$

$$\sigma_{btop} = \sigma_{eg} + \sigma_N \leq \sigma_{bEM}$$

$$\frac{1}{18 \cdot W_{eg}} \cdot \gamma_Y \cdot L_{Du} \cdot h_{Du}^3 + h_{Du} \cdot \gamma_{Du} \leq \sigma_{bEM}$$

$$\sigma_{çtop} = \sigma_{eg} - \sigma_N \leq \sigma_{bEM}$$

$$+ \frac{1}{18 \cdot W_{eg}} \cdot \gamma_Y \cdot L_{Du} \cdot h_{Du}^3 - h_{Du} \cdot \gamma_{Du} \leq \sigma_{bEM}$$

---


$$\frac{2}{18 \cdot W_{eg}} \cdot \gamma_Y \cdot L_{Du} \cdot h_{Du}^3 \leq 2 \cdot \sigma_{bEM}$$

Bu formülden duvarın zemini ökertmemesi için gereken max. duvar yüksekliği "h<sub>Du</sub>" bulunur.

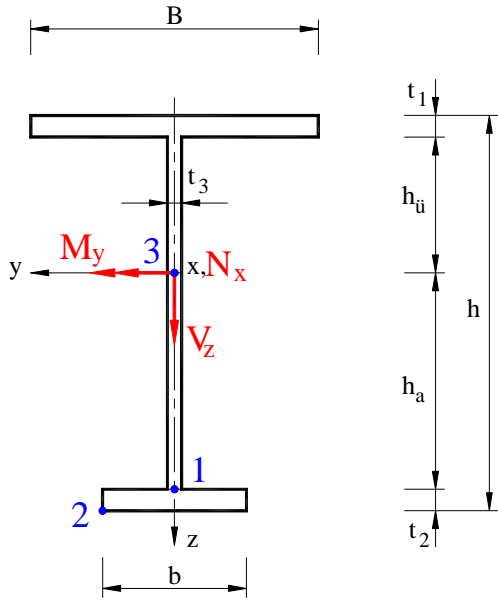
$$h_{Du} \leq 3 \sqrt{\frac{18 \cdot W_{eg} \cdot \sigma_{bEM}}{\gamma_Y \cdot L_{Du}}} \quad \underline{h_{Du} \leq 2,466 \text{ m}}$$

II. formülün  $\sigma_{eg} - \sigma_N \leq 0$  kısmından duvarın zeminden kalkmaması için gereken max. duvar yüksekliği "h<sub>Du</sub>" bulunur.

$$h_{Du} \leq \sqrt{\frac{18 \cdot W_{eg} \cdot \sigma_{bEM}}{\gamma_Y \cdot L_{Du}}} \quad \underline{h_{Du} \leq 1,342 \text{ m}}$$

Böylece bütün Şartları yerine getiren duvar yüksekliği h<sub>Du</sub> ≤ 1,342 m olarak bulunur.

## 15. Asimetrik T-profil



Şekil 15, Asimetrik T-profil

Şekil 15 ile verilen kesiti asimetrik T-profil

$$N_x = -2000 \text{ kN,}$$

$$V_z = 750 \text{ kN ve}$$

$$M_y = 750 \text{ kNm}$$

ile zorlanmaktadır.

$$h = 550 \text{ mm} ; h_a = 301 \text{ mm} ; h_u = 189 \text{ mm}$$

$$B = 400 \text{ mm} ; b = 200 \text{ mm}$$

$$t_1 = t_2 = 30 \text{ mm} ; t_3 = 20 \text{ mm}$$

**Arananlar:**

1. Analitik olarak 1,2 ve 3 numaralı noktadaki gerilmeler ve asal gerilmelerin analitik olarak hesabı,
2.  $\sigma_x$  ve  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$  gerilmelerinin değerleri ile dağılım diyagramları.

**Kolaylık için veriler:**

y-eksenine göre ana atalet momenti:

$$J_y = 1327 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad \text{dür.}$$

**Çözüm:**

$$\text{Kesitin toplam alanı: } A_{I-Top} = B \cdot t_1 + b \cdot t_2 + (h_a + h_u) \cdot t_3$$

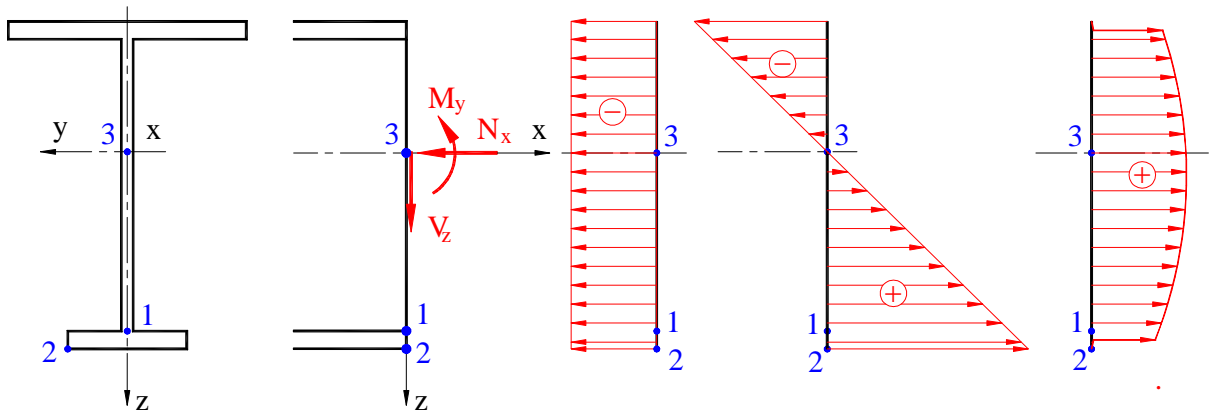
$$A_{I-Top} = 400 \cdot 30 + 200 \cdot 30 + 550 \cdot 20$$

$$A_{DI-Top} = 278 \text{ cm}^2$$

$$\text{Kesitin ağırlık merkezi: } h_S = \frac{0,5 \cdot t_2^2 \cdot b + (0,5 \cdot h + t_2) \cdot t_3 \cdot h + B \cdot t_1 \cdot (h + 0,5 \cdot t_1)}{A_{I-Top}}$$

$$h_S = 331 \text{ mm}$$

$$z_1 = h_S - t_2 = 331 - 30 = 301 \text{ mm} \quad z_1 = h_S = 331 \text{ mm} \quad z_3 = 0$$

**15.1. 1, 2 ve 3 numaralı noktalardaki gerilmeler**

Şekil 15-01, Kesitte gerilmelerin dağılımı

Şekil 15-01 ile kesitte gerilmelerin dağılımı görülmektedir. Normal gerilmelerin genel formülü ile

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y$$

Problemimizde  $M_z = 0$  olduğundan formülümüz:  $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z$  olur.

Kayma gerilmesi için **Bisquit** formülünü ele alalım:

$$\tau_{xz}(z_s) = \frac{V_z \cdot S(z_s)}{b(z_s) \cdot J_y}$$

ve noktalardaki aranan gerilmeleri hesaplayalım.

### 15.1.1. 1,2 ve 3 numaralı noktalardaki gerilmeler.

#### 1 numaralı noktalardaki gerilmeler:

$$\sigma_{x1} = \frac{N_x}{A_I} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_1 = \frac{-2000}{278} + \frac{750 \cdot 10^3}{127 \cdot 10^6} \cdot 301 \quad \underline{\underline{\sigma_{x1} = 98,24 \text{ MPa}}}$$

1 numaralı noktada statik moment:

$$S_1 = b \cdot t_2 \cdot (h_a + 0,5 \cdot t_2) = 200 \cdot 30 \cdot (301 + 0,5 \cdot 30) \quad \underline{\underline{S_1 = 1,896 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}}$$

$$\tau_{xz1} = \frac{V_z \cdot S_1}{t_3 \cdot J_y} = \frac{750 \cdot 10^3 \cdot 1,896 \cdot 10^6}{20 \cdot 1,327 \cdot 10^9} \quad \underline{\underline{\tau_{xz1} = 53,58 \text{ MPa}}}$$

#### 2 numaralı noktalardaki gerilmeler:

$$\sigma_{x2} = \frac{N_x}{A_I} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_2 = \frac{-2000}{278} + \frac{750 \cdot 10^3}{127 \cdot 10^6} \cdot 331 \quad \underline{\underline{\sigma_{x2} = 115,20 \text{ MPa}}}$$

2 numaralı noktada statik moment:

$$\underline{\underline{S_2 = 0}}$$

$$\tau_{xz2} = \frac{V_z \cdot S_2}{t_2 \cdot J_y} = \frac{750 \cdot 10^3 \cdot 0}{30 \cdot 1,327 \cdot 10^9} \quad \underline{\underline{\tau_{xz2} = 0}}$$

#### 3 numaralı noktalardaki gerilmeler:

$$\sigma_{x3} = \frac{N_x}{A_I} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_3 = \frac{-2000}{278} + \frac{750 \cdot 10^3}{127 \cdot 10^6} \cdot 0 \quad \underline{\underline{\sigma_{x3} = 71,88 \text{ MPa}}}$$

3 numaralı noktada statik moment:

$$S_3 = b \cdot t_2 \cdot (h_a + 0,5 \cdot t_2) + 0,5 \cdot h_a^2 \cdot t_3 = 200 \cdot 30 \cdot (301 + 0,5 \cdot 30) + 0,5 \cdot 301^2 \cdot 20 \quad \underline{\underline{S_3 = 2,802 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}}$$

$$\tau_{xz3} = \frac{V_z \cdot S_3}{t_3 \cdot J_y} = \frac{750 \cdot 10^3 \cdot 2,802 \cdot 10^6}{20 \cdot 1,327 \cdot 10^9} \quad \underline{\underline{\tau_{xz3} = 79,183 \text{ MPa}}}$$

**15.1.2. 1,2 ve 3 numaralı noktalardaki asal normal gerilmeler ve yönleri**

Asal normal gerilmeler: 
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Asal normal gerilmelerin yönü: 
$$\tan 2\varphi_1 = -\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

**1 numaralı noktadaki gerilmeler:**

$M_{y1} = 0$  olduğundan

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{x1}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x1}}{2}\right)^2 + \tau_{xz1}^2} = \frac{98,24}{2} + \sqrt{\left(\frac{98,24}{2}\right)^2 + 53,58^2} \quad \underline{\underline{\sigma_{11} = 121,8 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_{x1}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x1}}{2}\right)^2 + \tau_{xz1}^2} = \frac{98,24}{2} - \sqrt{\left(\frac{98,24}{2}\right)^2 + 53,58^2} \quad \underline{\underline{\sigma_{12} = -23,6 \text{ MPa}}}$$

$$\tan 2\varphi_{11} = -\frac{2 \cdot \tau_{xz1}}{\sigma_{x1}} \quad \varphi_{11} = 0,5 \cdot a \tan\left(\frac{2 \cdot 53,58}{98,24}\right) \quad \underline{\underline{\varphi_{11} = 23,743^\circ}}$$

**2 numaralı noktadaki gerilmeler:**

$M_{y2} = 0$  olduğundan

$$\sigma_{21} = \frac{\sigma_{x2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x2}}{2}\right)^2 + \tau_{xz2}^2} = \frac{115,2}{2} + \sqrt{\left(\frac{115,2}{2}\right)^2 + 0} \quad \underline{\underline{\sigma_{21} = 115,2 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{x2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x2}}{2}\right)^2 + \tau_{xz2}^2} = \frac{115,2}{2} - \sqrt{\left(\frac{115,2}{2}\right)^2 + 0} \quad \underline{\underline{\sigma_{22} = 0}}$$

$$\tan 2\varphi_{21} = -\frac{2 \cdot \tau_{xz2}}{\sigma_{x2}} \quad \varphi_{21} = 0,5 \cdot a \tan\left(\frac{2 \cdot 0}{115,2}\right) = 0 \quad \underline{\underline{\varphi_{21} = 0^\circ}}$$

**3 numaralı noktadaki gerilmeler:**

$M_{y3} = 0$  olduğundan

$$\sigma_{31} = \frac{\sigma_{x3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x3}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{-71,88}{2} + \sqrt{\left(\frac{-71,88}{2}\right)^2 + 79,183^2} \quad \underline{\underline{\sigma_{31} = 51,0 \text{ MPa}}}$$

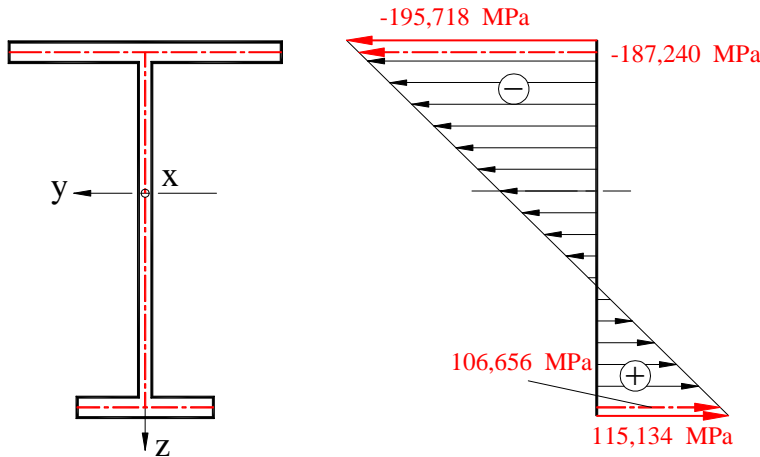
$$\sigma_{32} = \frac{\sigma_{x3}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x3}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{-71,88}{2} - \sqrt{\left(\frac{-71,88}{2}\right)^2 + 79,183^2} \quad \underline{\underline{\sigma_{32} = -122,9 \text{ MPa}}}$$

$$\tan 2\varphi_{31} = -\frac{2 \cdot \tau_{xz3}}{\sigma_{x3}} \quad \varphi_{31} = 0,5 \cdot a \tan\left(\frac{2 \cdot 79,183}{-71,88}\right) \quad \underline{\underline{\varphi_{31x} = -32,794^\circ}}$$

$$\varphi_{31} = 90 - 32,794 \quad \underline{\underline{\varphi_{31} = 57,203^\circ}}$$

## 15.2. $\sigma_x$ ve $\tau_{xz}$ , $\tau_{yx}$ gerilmelerinin değerleri ile dağılım diyagramları

### 15.2.1. Normal gerilme $\sigma_x$ in değerleri ve dağılımı



$$z_{\bar{u}} = -(h_{\bar{u}} + t_1)$$

$$z_{\bar{u}} = -219,0 \text{ mm}$$

$$z_{\bar{u}m} = -(h_{\bar{u}} + 0,5 \cdot t_1)$$

$$z_{\bar{u}m} = -204,0 \text{ mm}$$

$$\sigma_{x\bar{u}} = \frac{N_x}{A_I} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_{\bar{u}}$$

$$\sigma_{x\bar{u}} = \frac{-2000}{278} - \frac{750 \cdot 10^3}{127 \cdot 10^6} \cdot 219$$

$$\sigma_{x\bar{u}} = -195,718 \text{ MPa}$$

Şekil 15-02, Kesitte normal gerilmelerin dağılımı ve değerleri

$$\sigma_{x\bar{u}m} = \frac{N_x}{A_I} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_{\bar{u}m} = \frac{-2000}{278} + \frac{750 \cdot 10^3}{127 \cdot 10^6} \cdot (-204)$$

$$\sigma_{x\bar{u}m} = -187,240 \text{ MPa}$$

$$z_a = h_a + t_2$$

$$z_a = 331,0 \text{ mm}$$

$$z_{am} = h_a + 0,5 \cdot t_2$$

$$z_{am} = 316,0 \text{ mm}$$

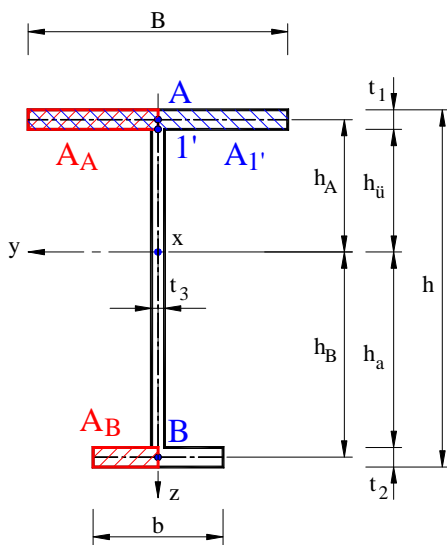
$$\sigma_{xa} = \frac{N_x}{A_I} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_a = \frac{-2000}{278} + \frac{750 \cdot 10^3}{127 \cdot 10^6} \cdot 331$$

$$\sigma_{xa} = 115,134 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xam} = \frac{N_x}{A_I} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_{am} = \frac{-2000}{278} + \frac{750 \cdot 10^3}{127 \cdot 10^6} \cdot 316$$

$$\sigma_{xam} = 106,656 \text{ MPa}$$

### 15.2.2. $\tau_{xz}$ , $\tau_{yx}$ gerilmelerinin değerleri ve dağılımı



A noktasında statik moment:

$$h_A = h_{\bar{u}} + 0,5 \cdot t_1 = 189 + 0,5 \cdot 30 = 204 \text{ mm}$$

$$S_A = 0,5 \cdot B \cdot t_1 \cdot h_A = 0,5 \cdot 400 \cdot 30 \cdot 204 =$$

$$S_A = 1,224 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

B noktasında statik moment:

$$h_B = h_a + 0,5 \cdot t_2 = 301 + 0,5 \cdot 30 = 316 \text{ mm}$$

$$S_B = 0,5 \cdot b \cdot t_2 \cdot h_B = 0,5 \cdot 200 \cdot 30 \cdot 316 =$$

$$S_B = 0,948 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

I' noktasında statik moment:

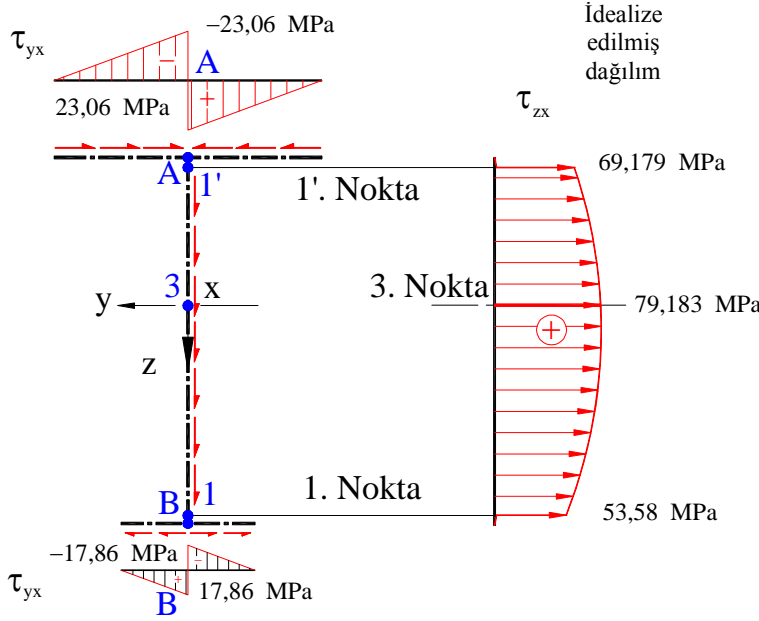
$$S_{I'} = B \cdot t_1 \cdot h_A = 400 \cdot 30 \cdot 204 =$$

$$S_{I'} = 2,448 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Şekil 15-03, Statik momentler



Bu değerler ve Bisquit formülüyle idealize edilmiş kayma gerilmesi dağılımını hesaplar ve diyagramını Şekil 15-04 ile görüldüğü gibi çizebiliriz.



Şekil 15-04,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$  gerilmelerinin değerleri ve dağılımı

$$\tau_{zx1'} = \frac{V_z \cdot S_{1'}}{t_3 \cdot J_y} = \frac{750 \cdot 10^3 \cdot 2,448 \cdot 10^6}{20 \cdot 1,327 \cdot 10^9}$$

$$\tau_{yxA} = \frac{V_z \cdot S_A}{t_1 \cdot J_y}$$

$$\tau_{yxA} = \frac{750 \cdot 10^3 \cdot 1,224 \cdot 10^6}{30 \cdot 1,327 \cdot 10^9}$$

$$\tau_{yxA} = 23,060 \text{ MPa}$$

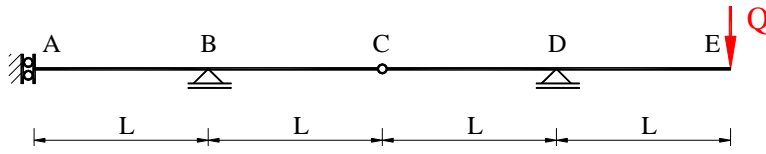
$$\tau_{yxB} = \frac{V_z \cdot S_B}{t_2 \cdot J_y}$$

$$\tau_{yxB} = \frac{750 \cdot 10^3 \cdot 0,948 \cdot 10^6}{30 \cdot 1,327 \cdot 10^9}$$

$$\tau_{yxB} = 17,860 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zx1'} = 69,179 \text{ MPa}$$

## 16. Mohr benzerliği, çok yataklı sistem



Şekil 16, Çok yataklı sistem

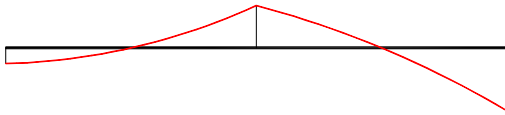
Verilenler:

Şekil 16 ile verilen sistem.

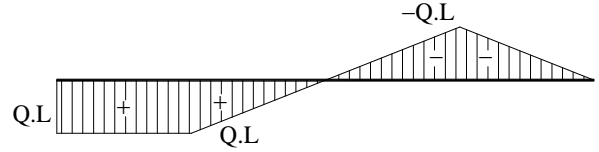
Arananlar:

A, B, C, D ve E noktalarında değerleri ile sehim çizgisi.

Çözüm:

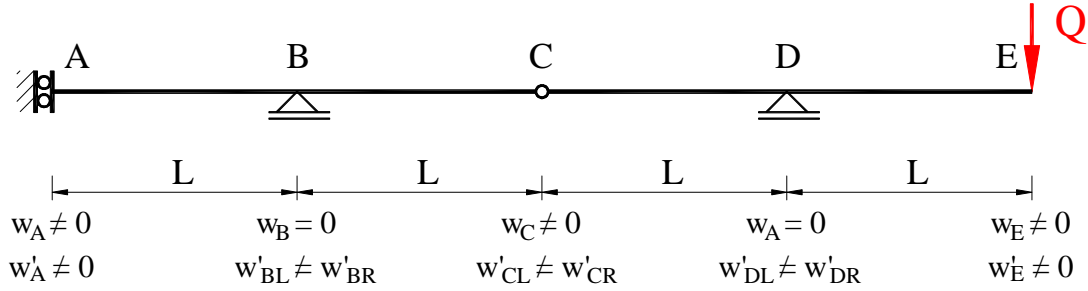


Şekil 16-01, Sehimin kalitatif dağılımı

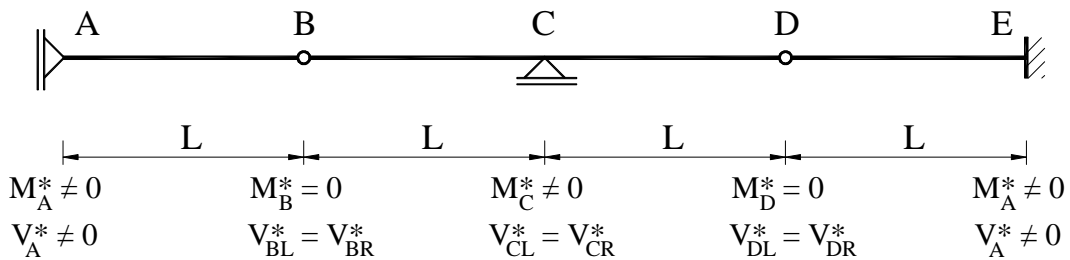


Şekil 16-02, Moment dağılımı

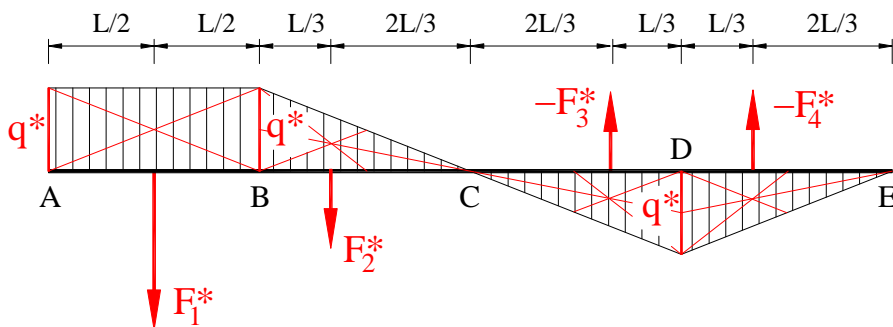
Sistemde bilinen ve analog kiriş:



Şekil 16-03, Sistemin bilinen kirişi



Şekil 16-04, Sistemin analog kirişi



Şekil 16-05, Analog kirişte zorlama

Şekil 16-05 ile sehimi aranan noktalardaki moment hesaplanarak sehimleri bulunur.

$$M = Q \cdot L \quad q^* = \frac{M}{E \cdot J} \quad q_A^* = \frac{Q \cdot L}{E \cdot J} \quad q_B^* = \frac{Q \cdot L}{E \cdot J} \quad q_D^* = \frac{Q \cdot L}{E \cdot J}$$

$$F_1^* = q_A^* \cdot L \quad F_2^* = q_B^* \cdot \frac{L}{2} \quad F_3^* = q_D^* \cdot \frac{L}{2} \quad F_4^* = q_D^* \cdot \frac{L}{2}$$

$$F_1^* = \frac{Q \cdot L^2}{E \cdot J} \quad F_2^* = \frac{Q \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J} \quad F_3^* = \frac{Q \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J} \quad F_4^* = \frac{Q \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

Temel değerleri bulduktan sonra sehimleri kolayca hesaplarız:

$$\Sigma M_B^* = 0 \quad w_A = M_A^* - F_1^* \cdot \frac{L}{2} \quad w_A = \frac{Q \cdot L^2}{E \cdot J} \cdot \frac{L}{2} \quad \underline{\underline{w_A = \frac{Q \cdot L^3}{2 \cdot E \cdot J}}}$$

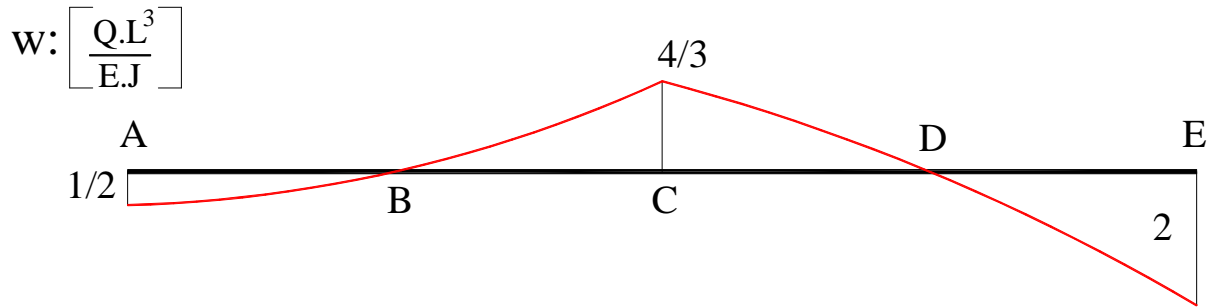
$$\Sigma M_C^* = 0 \quad M_C^* + F_1^* \cdot \frac{3L}{2} + F_2^* \cdot \frac{2L}{3} - M_A^* = 0 \quad M_C^* = -\frac{Q \cdot L^2}{E \cdot J} \cdot \frac{3L}{2} - \frac{Q \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{2L}{3} + \frac{Q \cdot L^3}{2 \cdot E \cdot J}$$

$$w_C = \frac{Q \cdot L^3}{E \cdot J} \left( -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \quad \underline{\underline{w_C = -\frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J}}}$$

$$\Sigma M_E^* = 0 \quad M_A^* + M_{CB}^* + M_E^* + F_1^* \cdot \frac{7L}{2} + F_2^* \cdot \frac{8L}{3} - F_3^* \cdot \frac{4L}{3} - F_4^* \cdot \frac{2L}{3} = 0$$

$$M_E^* = -\frac{Q \cdot L^3}{2 \cdot E \cdot J} - \frac{4 \cdot Q \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J} + \frac{Q \cdot L^2}{E \cdot J} \cdot \frac{7L}{3} + \frac{Q \cdot L^2}{E \cdot J} \cdot \frac{4L}{3} - \frac{Q \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{4L}{3} - \frac{Q \cdot L^2}{E \cdot J} \cdot \frac{2L}{3}$$

$$w_E = \frac{Q \cdot L^3}{E \cdot J} \left( -\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{7}{2} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \underline{\underline{w_E = -\frac{2 \cdot Q \cdot L^3}{E \cdot J}}}$$



Şekil 16-06, Sehimin değerleriyle dağılımı