İlk yayın: 22 Kasım 2014

www.guven-kutay.ch

YAPI STATİĞİ

Prof. Dr. P. Marti

Gerilmeler ve Mohr dairesi

44-04-1

Bu dosyayı ***44_00_Yapı Statiğine Giriş ve Özet*** dosyasıyla beraber incelerseniz daha iyi anlarsınız.

Çevirenler: ***M. Güven KUTAY, Muhammet ERDÖL***

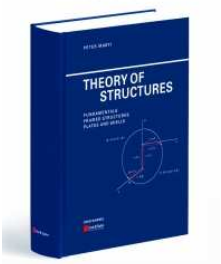
En son düzeltme: 22 Kasım 2014

Bu dosyalarda yalnız ders notlarının tercümesi verilmiştir. Daha geniş ve detaylı bilgi almanız için ***Prof. Dr. P. Marti*** nin Statik kitabını öneririm.

Almanca-Deutsch

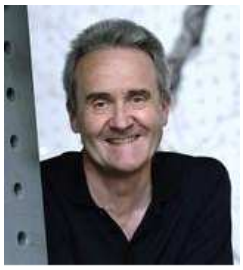
Peter Marti
Baustatik, Grundlagen-Stabtragwerke-Flächentragwerke
Ernst & Sohn, Berlin, 2012

İngilizce-English



Peter Marti
Theory of Structures, Fundamentals, Framed Structures, Plates and Shells
Ernst & Sohn, Berlin, 2012

Prof. Dr. P. Marti



Prof. Dr. sc. Peter Marti
1990 ile 2014 senelerinde
Zürich ETH da İnşaat Statiği
ve Konstrüksiyonu Profesörü

DİKKAT:

Bu çalışma iyi niyetle ve bugünün teknik imkanlarına göre yapılmıştır. Bu çalışmadaki bilgilerin yanlış kullanılmasından doğacak her türlü maddi ve manevi zarar için sorumluluk kullanana aittir. Bu çalışmadaki bilgileri kullananlara, kullandıkları yerdeki şartları iyi değerlendirip buradaki verilerin yeterli olup olmadığına karar vermeleri ve gerekirse daha detaylı hesap yapmaları önerilir. Eğer herhangi bir düzeltme, tamamlama veya bir arzunuz olursa, hiç çekinmeden bizimle temasa geçebilirsiniz.

Statik dosyalarında kullandığımız terimlerin Almancadan Türkçe karşılığını, ne Türk Dil Kurumunda nede normal veya elektronik sözlüklerde bulamadık. Hedefimiz Türkçe bilen ve temel bilgisi az dahi olan kütleye basit olarak bilgileri aktarmak olduğu için, kendi mantığımıza göre okuyucunun anlayacağı, basit Türkçe terimler kullandık. Ayrıca 44-00 numaralı dosyada Türkçe-Almanca(-İngilizce-Fransızca) sözlük ile Kaynakları verdik. İsteyen oradan kullanılan Türkçe terimleri ve tanımlamaları bulabilir. Bilginiz ola!..

Terimlerin Türkçe karşılığı için büyük yardımı olan sayın Muhammet ERDÖL e kendim ve dosyadan faydalanacakların adına çok teşekkür ederim.

İ Ç İ N D E K İ L E R

1. Gerilmeler 5

1.1. Gerilmelerin tarifi 5
1.1.1. Bir eksenli gerilme 6
1.1.2. İki eksenli gerilmeler 7
1.1.2.1. Kesit düzleminde n-ekseni yönünde normal gerilme "σ_n" 7
1.1.2.2. Kesit düzleminde t-ekseni yönünde normal gerilme "σ_t" 8
1.1.2.3. Kesit düzleminde t-ekseni yönündeki yönündeki kayma gerilmesi "τ_{tn}" 9
1.1.2.4. Kesit düzleminde kayma "n" yönünde "τ_{nt}" gerilmesi 10
1.1.3. Üç eksenli gerilmeler 11
1.2. Asal normal gerilmeler ve yönleri 16
1.3. Mohr dairesi 17
1.3.1. Mohr dairesinin merkez koordinatları 18
1.3.2. Mohr dairesinin radyus boyu 19
1.3.3. Asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 19
1.3.4. Maksimum kayma gerilmesi τ_{max} 19
1.3.5. Mohr dairesininin geometrik yorumlanması 19
1.4. Asal normal gerilmeler 20
1.4.1. Parçada σ ve τ için ön işaret kuralı 20
1.4.2. Mohr dairesinde gerilmelerin (σ ve τ) gösterilmesinde ön işaret kuralı 20
1.5. Mohr dairesinin konstrüksiyonu 21
1.5.1. Mohr dairesi için pratikten örnek 24

2. Kesitteki gerilmeler 27

2.1. Genel giriş 27
2.2. Gerilmeler ve deformasyonlar için kabuller ve sonuçları 27
2.3. Eğilme ve eksenel kuvvet 28
2.3.1. Atalet momentleri 30
2.3.1.1. Çeşitli kesitlerde atalet momentleri 31
2.3.2. Normal gerilmelerin genel formülü 32
2.3.3. Eğilme çizgisi 33
2.3.3.1. Kirişin diferansiyel denklemi ile sehim 33
2.3.3.2. Örnekler 35
2.3.4. Homojen olmayan kesitte eğilme ve eksenel kuvvet 37
2.4. Çapraz kuvvet 38
2.4.1. Çapraz kuvvetin yaklaşık incelenmesi 38
2.4.2. Statik moment 39
2.4.2.1. Statik moment hesapları örneği 39
2.4.3. Uygulama örneği 41
2.4.4. Şekil değiştirme işi "U" ya kısa bakış 41
2.4.5. Elastiklik teorisi 44
2.4.5.1. İnce cidarlı profillerde elastiklik teorisi 45
2.4.6. Torsiyon merkezi 46
2.5. Torsiyon 47
2.5.1. Dönüş torsiyonu (St.Venant) 47
2.5.2. İnce cidarlı kaval profiller 47

3. Deformasyonlar 49

3.1. İki eksenli deformasyonlar 49
3.2. Koordinatların transformasyonu 51
3.3. Üç eksenli deformasyonlar 53
3.4. Isı etkisinde deformasyonlar 56
3.5. Deformasyonların özeti 56
3.6. Uygulama örneği 56
3.7. Mohr dairesi ve benzerleri, özet 57
3.7.1. Gerilmeler için Mohr dairesi 57
3.7.2. Esnemeler için Mohr dairesi 58
3.7.3. Ataletler momentleri için Mohr dairesi 58

4. Kesit çekirdeği 59

4.1. Navier' e göre genel gerilme formülü 59
4.2. Kesit çekirdeğinin konstrüksiyonu 61
4.2.1. Genelde kesit çekirdeğinin konstrüksiyonu 61
4.2.2. Dikdörtgen kesit alanında çekirdek 61
4.2.3. Kesit çekirdeğinin detaylı konstrüksiyonu 62

5. Mohr benzerliği (Mohr analojisi) 65

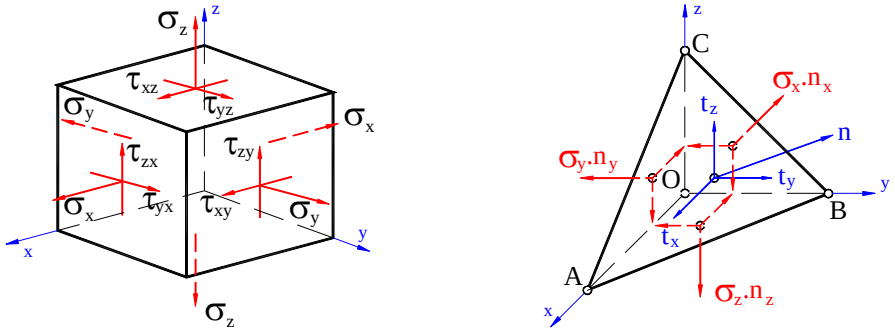
5.1. Prensip ve gidiş yolu 65
5.2. Örnekle Mohr benzerliği 66
5.2.1. Örnek 1, Serbest uçta tek kuvvetle zorlanan portafo (çıkma) kirişte sehim 66
5.2.2. Örnek 2, Sabit yayılı yükle zorlanan klasik kirişte sehim 67
5.2.3. Örnek 3, Mafsallı sistemde sehim 68

6. Konu İndeksi 69

1. Gerilmeler

1.1. Gerilmelerin tarifi

Bir cisim çeşitli dış kuvvetler etkisinde olsun. Örneğin: yüzey basıncı, basma ve benzeri kuvvetler gibi. Bu cisimden küp biçiminde küçük bir parça alalım (Şekil 1). Bu dış kuvvetler, bu küp şeklinde düşünülen küçük elementte üç eksenli gerilmeler meydana getirir.



Şekil 1, Cismin küçük küp parçacığı

Küpün altı yüzeyinin herbirinde bir normal ve iki kayma gerilmesi doğar (Şekil 1). Bu gerilmeleri bir koordinat sistemi ile gösterebiliriz. Eksenler x, y ve z olarak adlandırılır. Burada oluşan gerilmelere bakacak olursak iki cins gerilme görürüz:

1. ***Normal gerilmeler "σ"***: Şekil 1 ile gösterildiği gibi gerilmenin cinsi "σ" ile, gerilmenin yönüde indisi ile gösterilir. Örneğin: σ_x , x-ekseni yönünde normal gerilme. Normal gerilmelerde basma gerilmesi negatif (–), çekme gerilmesi ise pozitif (+) olarak kabul edilir. Genelde ön işaret kuralına göre işaretleri verilir (bkz. 44_00_Statiğe Giriş ve Özet dosyası).
2. ***Kayma gerilmeleri "τ"***: Şekil 1 ile gösterildiği gibi gerilme cinsi "τ" ile, indisinde 1. indis gerilmenin yönünü, 2. indisde gerilmenin dik olduğu ekseni gösterir. Örneğin: τ_{xy} , x-ekseni yönünde, y-eksenine dik kayma gerilmesi. Kayma gerilmeleri, cismin merkezini saat yönünde çeviriyorsa pozitif (+), tersine çeviriyorsa negatif (–) işaret verilir.

Eğer gerilme analizi yapılan parçada, parça üç boyutlu olduğu için genel olarak üç eksende etkili gerilmeler bulunmalıdır. Pratikte şu şekiller ortaya çıkar.

- Analizi yapılan parçada yalnız bir normal gerilme varsa ve diğer iki normal gerilmede sıfır ise bu gerilme şekline ***"bir eksenli gerilme"*** denir.
- Analizi yapılan parçada herhangi bir eksen yönünde etki eden gerilme sıfır ise, geriye gerilmeleri olan iki eksen kalacağından, böyle bir gerilme şekline ***"iki eksenli gerilme"*** denir. Bu gerilmeler ***"Düzlem gerilmeleri"*** diyede adlandırılır.
- Analizi yapılan parçada üç eksende etkili gerilmeler hemen hemen yok denecek kadar az rastlanır. Eğer üç eksende etkili gerilme varsa, böyle bir gerilme şekline ***"Üç eksenli gerilme"*** denir. Bu gerilmeler ***"Hacim gerilmeleri"*** diyede adlandırılır.

Pratikte genel olarak düzlemde hesaplar yapılır ve çok ender olarak gerilmeler hacimde düşünülür ve hesaplanır.

Bir çubuğu bir taraftan eğilme momenti diğer taraftan torsiyon momenti ile yükleyelim. Hesabın yapılacağı kesiti incelediğimizde, burada iki ayrı çeşit gerilme ile karşılaşırız. Bu durumda asıl soru ortaya çıkar.Ölçülendirilicek veya kontrol edilecek bir makina parçasının kesitinde, ayrı cinsden gerilmeler bulunursa, hesap nasıl yapılır?

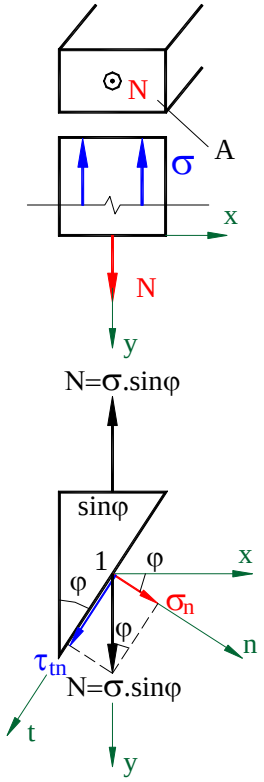
Böyle bir problemin çözümünde tutulacak yol şöyledir:

Parçaya etki eden gerilmeler bir eksenli gerilme olarak "karşılaştırma gerilmesi" adı altında toparlanır ve malzemenin mukavemet değeri ile karşılaştırılarak karar verilir. Malzemenin bilinen mukavemet değerleri, deneylerle elde edilen bir eksenli mukavemet değerleridir.

Genelde bir düzlemdeki gerilmeler en çok görülen haldir.

1.1.1. Bir eksenli gerilme

Dikdörtgen prizma şeklindeki bir çubuğun y-ekseni yönünde normal kuvvetle zorlandığını düşünelim. Eksende etken olan kuvvetin dik kesitte doğurduğu gerilmeye, "**bir eksenli gerilme**" veya "**bir boyutlu gerilme**" denir. Burada yalnız normal kuvvet "$N=F_y$" olduğundan, $F_x = F_z = 0$ olur ve $\tau_{xy} = 0$ ve $\sigma_x = \sigma_z = 0$ dır. Bkz Şekil 2.

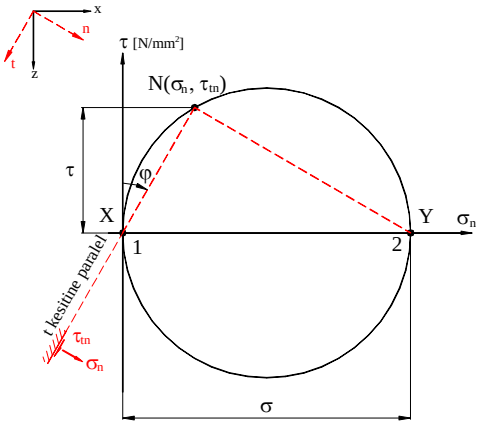


Kesit alanı A, Normal kuvvet N= σ. A = sabit ise φ açılı kesitte:

Normal gerilme : $\sigma_n = \sigma \cdot \sin^2 \varphi$

Kayma gerilmesi : $\tau_{tn} = \sigma \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$

Mohr dairesi ile gerilmelerin geometrik yorumlanması için Şekil 2 ile verilmiş olan dikdörtgen prizmanın t kesitinde oluşan gerilmeler Şekil 3 ile Mohr dairesi olarak gösterilir. Burada Mohr dairesinde X noktası Kutup noktası rolünü oynar. X den parça kesitine çizilen paralelin daireyi kestiği nokta "N" noktasıdır.



Şekil 2, Bir eksenli gerilme

Şekil 3, Bir eksenli gerilme için Mohr dairesi

Eğik kesitteki gerilmeler:

Çubukta φ açılı eğik bir kesitte oluşan gerilmeleri bulalım. Kesit düzlemi eksenini "t" (teğetsel) ve kesit düzlemine dik ekseni "n" (normal) olarak adlandıralım.

Şekil 2 ile "n" yönündeki normal gerilme "σ_n" bağıntısı şu şekilde bulunur:

"$\sigma = N/A$" buradan "$N = \sigma \cdot A$" eğik düzlem için "$A \cdot \sin\varphi$" ve alananı birim alan "$A = 1$" olarak düşünürsek "$N = \sigma \cdot A \cdot \sin\varphi$" buradanda "$N = \sigma \cdot \sin\varphi$" bulunur.

$\sigma_n = F_n / A_\varphi$ $\quad F_n = N \cdot \sin\varphi$ $\quad A_\varphi = A / \sin\varphi$

$$\sigma_n = \frac{N \cdot \sin\varphi \cdot \sin\varphi}{A} \qquad \boxed{\sigma_n = \sigma \cdot \sin^2 \varphi}$$

Buna benzer kayma gerilmesi "$\tau = \tau_{tn} = \tau_{nt}$" şu şekilde bulunur:

$\tau = F_t / A_\varphi$ $\quad F_t = N \cdot \cos\varphi$

$$\tau = \tau_{tn} = \tau_{nt} = \frac{N \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{A} \qquad \boxed{\tau_{tn} = \sigma \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

Trigonometri fonksiyonuna göre : $2 \sin\varphi \cos\varphi = \sin 2\varphi$ ve $\sin\varphi \cos\varphi = \sin 2\varphi / 2 = 0{,}5 \cdot \sin 2\varphi$ olduğuna göre,

$$\boxed{\tau_{tn} = 0{,}5 \cdot \sigma \cdot \sin 2\varphi}$$

olarakta gösterilebilinir.

Şekil 2 ile "t" yönündeki normal gerilme "σ_t" bağıntısı şu şekilde bulunur:

$\sigma_t = F_t / A_{\varphi+\pi/2}$ $\qquad F_t = N \,.\, \cos\varphi$ $\qquad A_{\varphi+\pi/2} = A / \cos\varphi$

$$\sigma_t = \frac{N \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi}{A} \qquad \boxed{\sigma_t = \sigma \cdot \cos^2\varphi}$$

Burada hesapladığımız σ_n ve σ_t gerilmelerini toplayacak olursak:

$$\sigma_n + \sigma_t = \sigma \cdot \sin^2\varphi + \sigma \cdot \cos^2\varphi = \sigma \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ olduğundan

$$\boxed{\sigma_n + \sigma_t = \sigma}$$

Burada sınır değerlerini arayacak olursak "n" yönündeki normal gerilme $\boldsymbol{\sigma_n}$ için $\mathbf{\sin^2\varphi = 1}$, "t" yönündeki normal gerilme $\boldsymbol{\sigma_t}$ için $\mathbf{\cos^2\varphi = 1}$ ve kayma gerilmesi $\boldsymbol{\tau}$ için $\mathbf{\sin 2\varphi = 1}$ olması gereklidir.

σ_n nin σ_{nmax} olması için $\sin^2\varphi = 1$, yani $\varphi = 90°$ olmalıdır. Böylece 1. asal gerilme bulunur.

Böylece: $\sigma_1 = \sigma_{nmax} = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_{tmin} = 0$ olur.

σ_t nun σ_{tmax} olması için $\cos^2\varphi = 1$ yani $\varphi = 0°$ olmalıdır. Böylece 2. asal gerilme bulunur.

Böylece: $\sigma_1 = \sigma_{tmax} = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_{nmin} = 0$ olur.

$\tau = \tau_{max}$ olması için $\sin 2\varphi = 1$ yani $\varphi = 45°$ olmalıdır.

Böylece: $\tau = \tau_{max} = \sigma / 2$ ve $\sigma_{nmax} = \sigma_{tmax} = \sigma / 2$ olur. Bu durumu şöyle gösteririz:

$$\boxed{\tau_{max} = \sigma_{n\,max} + \sigma_{t\,max} = \sigma / 2}$$

Sonuç: ***Kuvvet eksenine dik olan kesitte beklenildiği gibi asal normal gerilme bir eksenli gerilme şeklindedir ve kayma gerilmesi sıfırdır.***
Birinci asal gerilme "$\sigma_1 = \sigma = N/A$" dır. 45° lik eğik kesitte ise en fazla gerilme olasılığı "$\tau_{max} = \sigma_{nmax} + \sigma_{tmax} = \sigma/2$" kadardır.

1.1.2. İki eksenli gerilmeler

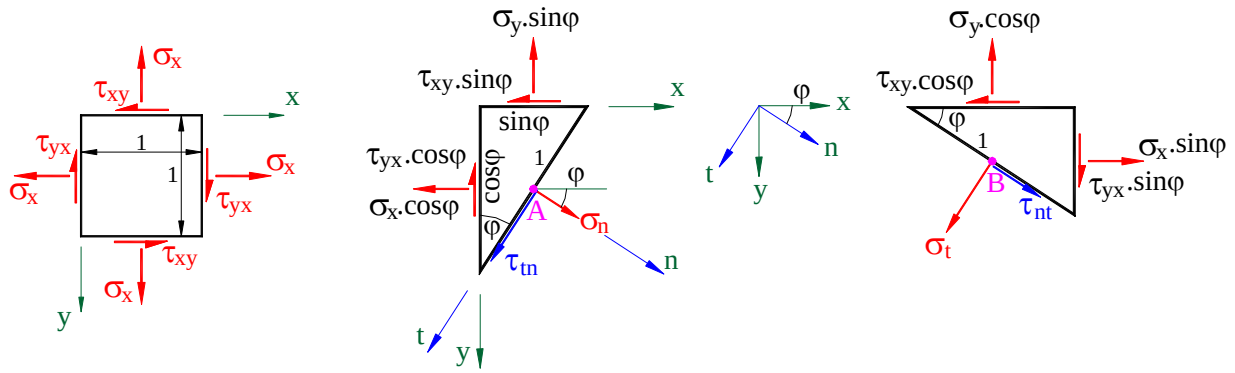
İki boyutlu veya iki eksenli, düzlem gerilmesi. Düzlemde gerilmelerin analizini yapmak için Şekil 4 ile görülen eni ve boyu bir birim olan parçayı ele alalım ve parçadaki gerilmeleri belirleyelim.
Şekil 4 ile üçgen olarak gösterilen esasında prizmadır, düzlemde gerilme analizi yapıldığından üçgen olarak şekilde gösterilmiştir. Prizmayı etkileyen bütün dış gerilmelerin doğurduğu iç kuvvet ve alan sabit olduğu için gerilmelerinde statiğin denge kanununu gerçekleştirmesi gereklidir. Şekil 5 ile görüldüğü gibi üçgenin A noktasında bütün kuvvet veya gerilmelerin toplamı mekaniğin denge kanunlarına göre sıfır olmalıdır. Bu prizmanın yüzeyleri x ve y yönlerinde σ_x , σ_y ve $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ tarafından etkilenir. Bu etkilerden duruma göre σ_n , σ_t ve $\tau = \tau_{nt} = \tau_{tn}$ gerilmeleri oluşur.

1.1.2.1. Kesit düzleminde n-ekseni yönünde normal gerilme "σ_n"

Şekil 5 ile verilen A noktasındaki normal gerilmelerin toplamı için denge denklemini kuralım.

$$\Sigma\sigma_n = 0 \qquad \Sigma\sigma_{An} = 0$$

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} + \sigma_{IV}}$$



Şekil 4, Düzlemde gerilmeler

Yukarıda verilen denklemdeki bilinmiyenleri sırasıyla hesaplayalım. Burada Şekil 4 ile verilen örnek, iki eksenli gerilme veya iki boyutlu gerilme için genelde gösterilen tipik örneklerden biridir.

$\sigma_y \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni	$\sigma_I = \sigma_y \cdot \sin\varphi \cdot \sin\varphi$	$\boxed{\sigma_I = \sigma_y \cdot \sin^2\varphi}$
$\sigma_x \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni	$\sigma_{II} = \sigma_x \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\sigma_{II} = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi}$
$\tau_{xy} \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni		$\boxed{\sigma_{III} = \tau_{xy} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$
$\tau_{yx} \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni		$\boxed{\sigma_{IV} = \tau_{yx} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$

Buradan σ_n nin formülü F 1 bulunur

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + \tau_{xy} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{F 1}$$

σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
φ	°	Kesitin açısı
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

1.1.2.2. Kesit düzleminde t-ekseni yönünde normal gerilme "σ_t"

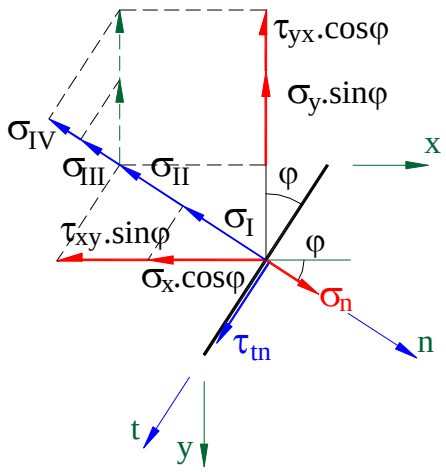
Denge denklemini Şekil 6 ile verilen B noktasında normal gerilmelerin toplamı için kuralım.

$$\Sigma\sigma_t = 0 \qquad \Sigma\sigma_{Bt} = 0$$

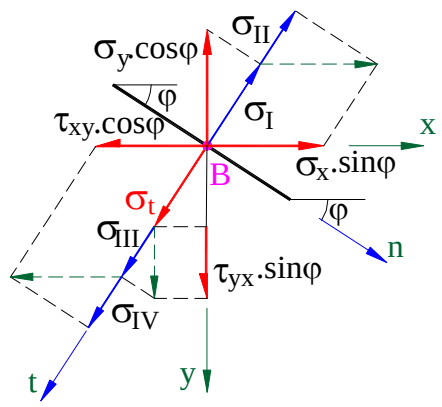
$$\boxed{\sigma_t = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} + \sigma_{IV}}$$

Yukarıda verilen denklemdeki bilinmeyenleri sırasıyla hesaplayalım:

$\sigma_x \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni	$\sigma_I = \sigma_x \cdot \sin\varphi \cdot \sin\varphi$	$\boxed{\sigma_I = \sigma_x \cdot \sin^2\varphi}$
$\sigma_y \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni	$\sigma_{II} = \sigma_y \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\sigma_{II} = \sigma_y \cdot \cos^2\varphi}$



Şekil 5, A noktasında σ_n gerilmesi



Şekil 6, B noktasında σ_t gerilmesi

$\tau_{xy} \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni

$$\boxed{\sigma_{III} = -\tau_{xy} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

$\tau_{yx} \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni

$$\boxed{\sigma_{IV} = -\tau_{yx} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

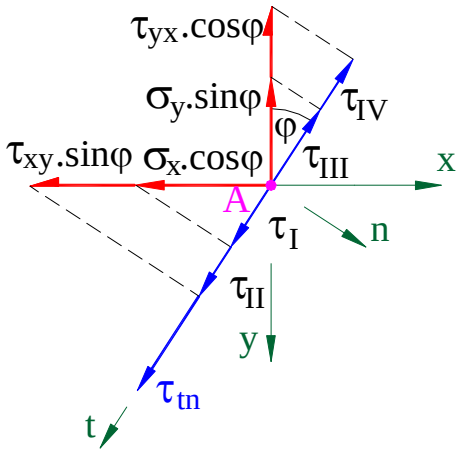
Buradan t-ekseni yönündeki normal gerilme σ_t nin formülü F 2 ile bulunur

$$\boxed{\sigma_t = \sigma_x \cdot \sin^2\varphi + \sigma_y \cdot \cos^2\varphi - \tau_{xy} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{F 2}$$

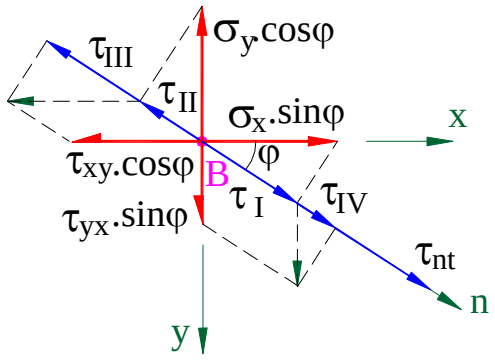
σ_t	MPa	t-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
φ	°	Kesitin açısı
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

Prensipte formül F 1 ile sin yerine cos, cos yerine sin konulup kayma gerilişminin işareti negatif alınsa hemen σ_t değeri bulunur. Yalnız ***sin, cos*** ile yer değiştirse F 2 ile kolaylıkla bulunur.

1.1.2.3. Kesit düzleminde t-ekseni yönündeki yönündeki kayma gerilmesi "τ_{tn}"



Şekil 7, A noktasında τ_{tn} gerilmesi



Şekil 8, B noktasında τ_{nt} gerilmesi

Denge denklemini Şekil 7 ile verilen A noktasında kayma gerilmelerinin toplamı için kuralım.

$$\Sigma\tau_t = 0 \qquad \Sigma\tau_{At} = 0$$

$$\tau_{tn} + \tau_I + \tau_{II} - \tau_{III} - \tau_{IV} = 0$$

$$\boxed{\tau_{tn} = -\tau_I - \tau_{II} + \tau_{III} + \tau_{IV}}$$

Yukarıda verilen denklemdeki bilinmiyenleri sırasıyla hesaplayalım:

$\sigma_x \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni	$\tau_I = \sigma_x \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\tau_I = \sigma_x \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$
$\tau_{xy} \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni	$\tau_{II} = \tau_{yx} \cdot \sin\varphi \cdot \sin\varphi$	$\boxed{\tau_{II} = \tau_{yx} \cdot \sin^2\varphi}$
$\sigma_y \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni	$\tau_{III} = \sigma_y \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\tau_{III} = \sigma_y \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$
$\tau_{xy} \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni	$\tau_{IV} = \tau_{yx} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\tau_{IV} = -\tau_{xy} \cdot \cos^2\varphi}$

Buradan τ_{tn} nin değeri F 3 ile bulunur.

$$\boxed{\tau_{tn} = \tau_{nt} = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \qquad \text{F 3}$$

σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
φ	°	Kesitin açısı
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

1.1.2.4. Kesit düzleminde kayma "n" yönünde "τ_{nt}" gerilmesi

Denge denklemini Şekil 8 ile verilen B noktasında kayma gerilmelerinin toplamı için kuralım.

$$\Sigma\tau_n = 0 \qquad \Sigma\tau_{Bt} = 0$$

$$\tau_{nt} + \tau_I - \tau_{II} - \tau_{III} + \tau_{IV} = 0$$

$$\boxed{\tau_{tn} = -\tau_I + \tau_{II} - \tau_{III} + \tau_{IV}}$$

Yukarıda verilen denklemdeki bilinmiyenleri sırasıyla hesaplayalım:

$\sigma_x \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni	$\tau_I = \sigma_x \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\tau_I = \sigma_x \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$
$\sigma_y \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni	$\tau_{II} = \sigma_y \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\tau_{II} = \sigma_y \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$
$\tau_{xy} \cdot \cos\varphi$ nin bileşeni	$\tau_{III} = \tau_{yx} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi$	$\boxed{\tau_{III} = \tau_{xy} \cdot \cos^2\varphi}$
$\tau_{xy} \cdot \sin\varphi$ nin bileşeni	$\tau_{IV} = \tau_{yx} \cdot \sin\varphi \cdot \sin\varphi$	$\boxed{\tau_{IV} = \tau_{yx} \cdot \sin^2\varphi}$

Buradan τ_{nt} nin formülü F 4 de aynen F 3 gibi bulunur.

$$\boxed{\tau_{tn} = \tau_{nt} = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \qquad \text{F 4}$$

σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
φ	°	Kesitin açısı
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

1.1.3. Üç eksenli gerilmeler

Formül **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** ile verilmiş olan "$\underline{t}$" vektörü herhangi bir yönde "$\underline{\nu}$" ile bir skaler $\sigma = \underline{t} \cdot \underline{\nu}$ verir. Burada vektör "$\underline{t}$" 1. dereceden tensör olarak kabul edilmelidir.

İlerde "Virtüel İş Prensibi" dosyasında göreceğimiz Statik Sınır Koşullar formülü (F 5) ile Gerilmeler tensörü" (F 6) ile "$\underline{\nu}$" nin her yönünde bir vektör "$\underline{t}$" oluşturur. Gerilmeler tensörü "σ_{ij}" matrisi simetrik 2. dereceden tensördür (F 6).

$$t_x = \sigma_x \cdot \nu_x + \tau_{xy} \cdot \nu_y + \tau_{xz} \cdot \nu_z, \ \ldots \qquad \text{F 5}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad \text{F 6}$$

Genel olarak bu bağıntılar matris olarak gösterilir ve ***"matrisle yazılış şekli"*** denir (F 7):

$$\{t\} = [\sigma]\{\nu\} \qquad \text{F 7}$$

Diğer yazılışa ***"sembolle yazılış şekli"*** denir (F 8):

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\nu} \qquad \text{F 8}$$

Veya başka yazılışa ***"indisle yazılış şekli"*** denir (F 9):

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot \nu_j \qquad \text{F 9}$$

F 9 ile görülen indis "j" bize değerlerin toplanacağını söyler. Bu toplama şekli "***Einstein*** nın toplama konvansiyonu" olarak tanımlanan şekilde yapılır.

$\underline{t} = \sigma \cdot \underline{\nu}$ formülünde $\underline{\nu}$ yönünü bulmak istersek:

eğer kayma gerilmeleri yoksa $\tau_x = 0$ demektir ve kayma gerilmesinin olmadığı yönde formülümüz:

$$\underline{t} = \sigma \cdot \underline{\nu} \qquad \text{F 10}$$

veya kayma gerilmeleri yoksa $\tau_x = 0$ demektir ve F 5 formülüne göre F 11 ile görülen homojen ve lineer eşitlik formülü ***"Homojen lineer denklem"*** bulunur:

$$(\sigma_x - \sigma) \cdot \nu_x + \tau_{xy} \cdot \nu_y + \tau_{xz} \cdot \nu_z = 0 \qquad \text{F 11}$$

Vektör $\underline{\nu}$ nün trival olmayan çözümü ile, eşitlik sisteminin determinantları ortadan kalkarsa, ***"Karakteristik denklem"*** ortaya çıkar, F 12.

$$\sigma^3 - \sigma_{(1)} \cdot \sigma^2 + \sigma_{(2)} \cdot \sigma - \sigma_{(3)} = 0 \qquad \text{F 12}$$

F 5 den F 12 e kadar sembollerin tarifi

τ	MPa	idisinde gösterilen yönündeki kayma gerilmesi
σ	MPa	idisinde gösterilen yönündeki normal gerilme
$\underline{\nu}$	1	Birim vektörü
$\underline{t}$	N	Elementer kuvvet
$\sigma_{(i)}$	MPa	Değişmez değerler
σ_i	MPa	Asal gerilmeler

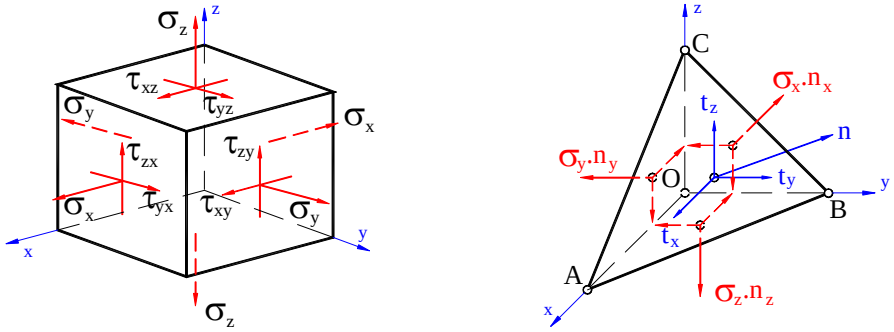
F 12 eşitliği şu değişmez değerlerle oluşur.

$$\sigma_{(1)} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \qquad = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \qquad \text{F 13}$$

$$\sigma_{(2)} = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \qquad = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{(3)} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \qquad = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

Gerilmeler tensörü "σ_{ij}" nin (F 6) temel invariantları F 12 formülünün temel değerleri asal gerilmeler σ_1, σ_2.ve σ_3.dür. Asal yönler $\underline{\nu}_1$, $\underline{\nu}_2$ ve $\underline{\nu}_3$ F 11 e temel değerlerin yerleştirilmesiyle bulunur.



Şekil 9, Üç eksenli gerilmeler

$\Delta_{OAC} = \nu_y$; $\Delta_{OAB} = \nu_z$; $\Delta_{OBC} = \nu_x$ $\qquad \Delta_{ABC} = 1 = \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2$

Burada ν ABC düzlemine dik birim vektörüdür.

$$\begin{Bmatrix} t_x & = & \sigma_x\nu_x & + & \tau_{xy}\nu_y & + & \tau_{xz}\nu_z \\ t_y & = & \tau_{yx}\nu_x & + & \sigma_y\nu_y & + & \tau_{yz}\nu_z \\ t_z & = & \tau_{zx}\nu_x & + & \tau_{zy}\nu_y & + & \sigma_z\nu_z \end{Bmatrix}$$

Karakteristik denklem, trival çözümü olmayan homojen lineer eşitlik sisteminin (Determinantı=0) çözümüyle bulunur. Karakteristik denklemin çözümüyle de ***"Ana gerilmeler"*** bulunur.
Ana yönler $\underline{\nu}_1$, $\underline{\nu}_2$, $\underline{\nu}_3$; σ_1, σ_2, σ_3 homojen lineer denkleme yerleştirilmesiyle bulunur. Şöyle ki:

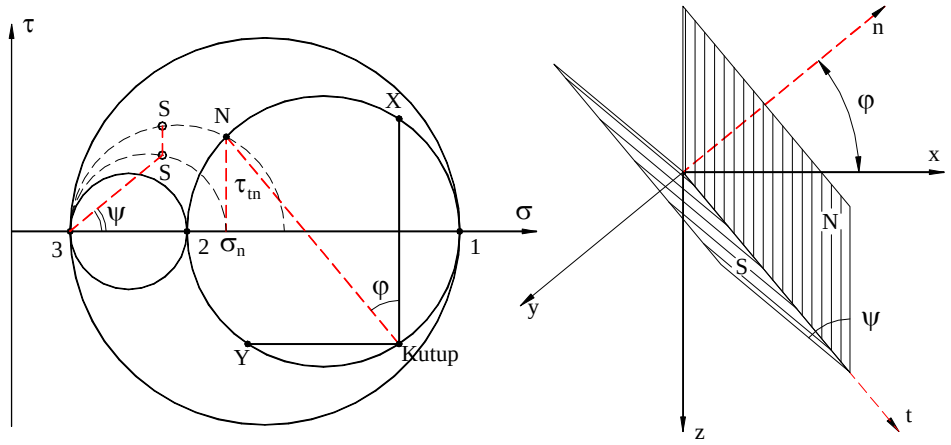
$$\nu_{ix} = \frac{-C_{iy} \cdot C_{iz}}{\sqrt{C_{ix}^2 \cdot C_{iy}^2 + C_{ix}^2 \cdot C_{iz}^2 + C_{iy}^2 \cdot C_{iz}^2}}$$

$[C_{ix} = (\sigma_x\text{-}\sigma_i).\tau_{yz} - \tau_{xy}.\tau_{xz}, \ldots]$

(i=1, 2, 3, ...)

Hatırlatma:

- Karakteristik denklemdeki $\sigma_{(2)}.\sigma$ terimi çok kere negatif ön işaretli olarak yazılır. $\sigma_{(2)}$ için sağ el kuralının tersi kabul edilir.
- Gerilme darbeleri hidrostatik ve deviatorik komponentlerine ayrılır (literatüre bkz). Ana eksen sisteminde veya ana gerilmeler hacminde geometrik interpretasyonlar, hidrostatik eksen ve deviatorik düzlem oktaeder normal gerilme ve oktaeder kayma gerilmesi ile yapılır (literatüre bkz).
- Ortagonal kabul edilen betonun kullanılma yöntemini"fib-ch-Publikation Osaka 2002" yayınında bulursunuz.



"N" z-eksenine paralel normal düzlem

"S" t-ekseni etrafında ψ açısıyla dönmüş düzlem

Şekil 10, Üç eksenli gerilmeler ile Mohr dairesi

"S" noktalarının gerilmeleri Şekil 10 ile görülen 1-2, 2-3 ve 3-1 ana dairelerinin arasında kalan orak şeklindeki kısımdadırlar. Konstrüksiyon, z-ekseni σ_3 yönünde kabul edilirse, gerilmelerin tensörleri düzlemsel ve hidrostatik olarak gösterilir (bkz. F 14).

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_3 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\text{Düzlemsel}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}}_{\text{hidrostatik}} \qquad \text{F 14}$$

Maksimum kayma gerilmesi (τ_{max}) iki asal gerilmenin ekstrem değeriyle bulunur (F 15).

$$\tau_{max} = 0{,}5 \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \quad \text{eğer} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \text{ise.} \qquad \text{F 15}$$

Genelde gerilme tensörü hidrostatik ve deviatorik kısımlara ayrılarak gösterilir (F 16).

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}}_{\text{hidrostatik}} + \underbrace{\begin{pmatrix} S_x = \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_y = \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_z = \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}}_{\text{deviatorik}} \qquad \text{F 16}$$

F 16 formülü ile verilen σ_0 genelde ***"Oktaeder normal gerilme"*** olarak bilinen şu büyüklüktür.

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{(1)} \qquad \text{F 17}$$

Genel olarak deviatoru şu şekilde gösterebiliriz:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \cdot \delta_{ij} \qquad \text{F 18}$$

Burada verilen birim matrisini δ_{ij} F 13 formülüne analog olarak yazarsak deviatörün üç değişmez değerli ana denklemlerini buluruz, F 19:

$$S_{(1)} = 0$$

$$S_{(2)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_y\right) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 = \sigma_{(2)} + \frac{1}{3} \cdot \sigma_{(1)}^2 \qquad \text{F 19}$$

$$S_{(3)} = \sigma_{(3)} + \frac{1}{3}\cdot S_{(2)}\cdot\sigma_{(1)} - \frac{1}{27}\cdot\sigma_{(1)}^3$$

Eksenleri σ_1, σ_2 ve σ_3 olan koordinat sisteminde herhangi bir "$\underline{\sigma}$" vektörü, hidrostatik eksende ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) bulunan "$\underline{\sigma}_0$" vektörü ve deviatorik düzlemde ($\sigma_{(1)}$=0) bulunan "$\underline{s}$" vektörü ile gösterilir ($\underline{\sigma}_0 \,.\, \underline{s} = 0$), Şekil 11.

Vektör $\underline{s}$ nin deviatik düzleme izdüşümüşu şekilde formüle edilir:

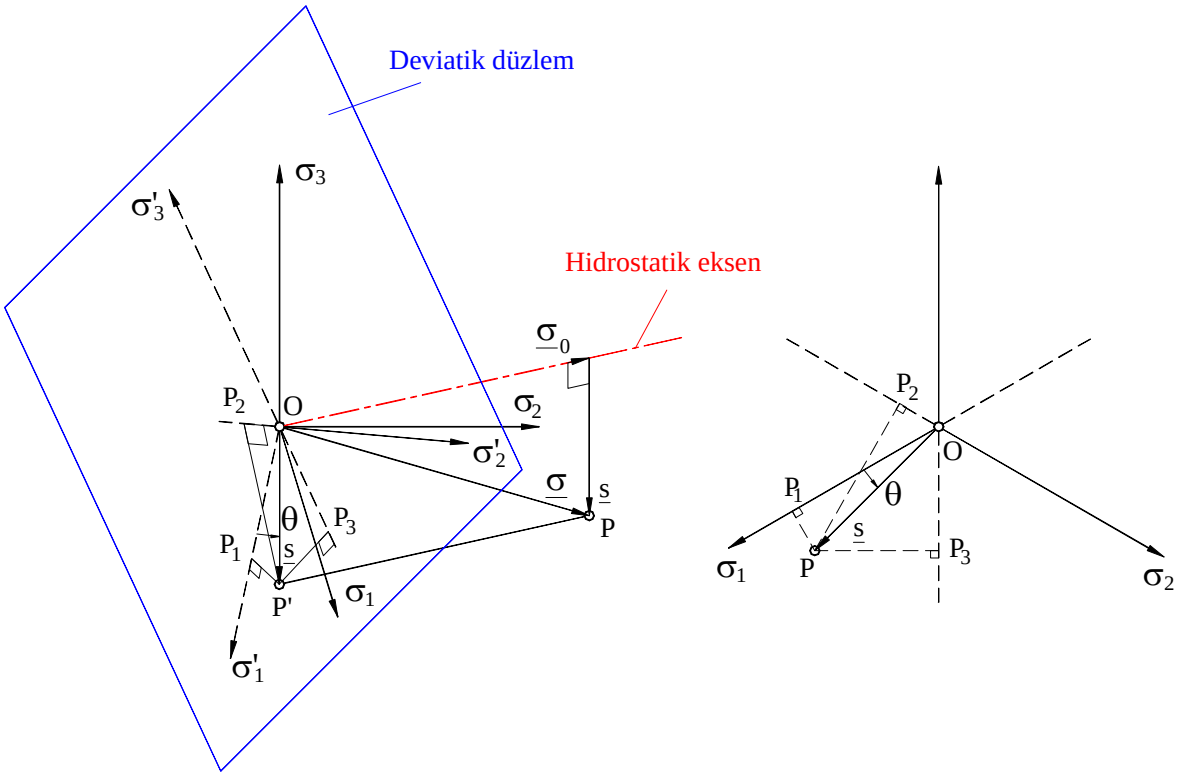
$$OP_1 = (\sigma_1.\sigma_2,\sigma_3)\cdot(2,-1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = 3\cdot\underline{s},\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\underline{s},\ \ldots \qquad \text{F 20}$$

Burada $\underline{s}$ vektörünün değeri

$$|\underline{s}| = \sqrt{2\cdot s_{(2)}} = \sqrt{3}\cdot\tau_0 \qquad \text{F 21}$$

F 21 formülü ile verilen τ_0 genelde ***"Oktaeder kayma gerilmesi"*** olarak bilinen şu büyüklüktür.

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot s_{(2)}} \qquad \text{F 22}$$



Şekil 11, Deviatik düzlemle üç eksenli gerilmeler

Şekil 11 ile görülen θ açısının değeri F 23 ile bulunur.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{s_1}{\tau_0} = \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{2\cdot\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\tau_0} \qquad \text{F 23}$$

Parçadaki gerilmelerin durumu, bilinen gerilmeler σ_0, τ_0 ve θ açısının verilmesiyle ana eksenler sisteminde kati olarak belirlenir.

Bunun yanında şunuda unutmamak gerekir; ana eksenler sistemine geçişini sağlayan başlangıç koordinatlarını belirleyen altı tensörün bileşenleri kaybolmuştur (görünmemektedir).

1.2. Asal normal gerilmeler ve yönleri

Burada maksimum ve minimum değerleri bulmak için birinci derecedeki diferansiyel denklemi sıfıra eşitlememiz gereklidir. Bu hesabı yapmak istersek:

$$d\sigma_n / d\varphi = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + \tau_{xy} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\left(\sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\,\tau\cos\varphi\sin\varphi\right) / d\varphi = 0$$

$$-\sigma_x \sin 2\varphi + \sigma_y \sin 2\varphi - 2\,\tau\cos 2\varphi = 0 \qquad (-\sigma_x + \sigma_y)\sin 2\varphi = 2\,\tau\cos 2\varphi$$

$$\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{2\,\tau}{-(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Böylece asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 nin yönlerinin açısı bulunur:

$$\boxed{\tan 2\varphi_1 = -\frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \qquad \text{F 24}$$

φ_1	°	Kesitin açısı *)1
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme

*)1 Burada φ_1 açısı, x-ekseni ile 1. asal normal gerilme ekseninin oluşturduğu φ açısıdır.

F 24 ile verilenlerin analizini yaparsak:

Asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 birbirlerine diktirler ve tan2φ birbirinden 180° farklı iki açıyı gösterir. Bunun yanında φ açısı birbirine 90° farklı iki eksen yönünü belirler.

Diğer taraftan kayma gerilmelerinin hesabına devam edersek (F 4):

$$\tau_{tn} = \tau_{nt} = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)\cdot\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\cdot\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

Trigonometri bilgimizi tazelersek;

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi \qquad \text{ve} \qquad \sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi / 2$$

Bu bağıntıları τ_{tn}-formülünde yerleştirirsek:

$$\tau_{tn} = \tau\cos 2\varphi + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\sin 2\varphi$$

Asal normal gerilmelerin yönleri formülünü tekrar ele alıp işlersek (F 24):

$$\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = -\frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \text{ve buradan} \qquad \sin 2\varphi = -\frac{2\,\tau_{xy}\cos 2\varphi}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Bu bulunan değeri yerleştirirsek:

$$\tau_{tn} = \tau\cos 2\varphi + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\,\frac{-2\,\tau_{xy}\cos 2\varphi}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\boxed{\tau_{tn} = \tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi - \tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi \;\; !..} \qquad \text{F 25}$$

τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi
φ	°	Kesitin açısı

F 25 ile ile verilenlerin analizini yaparsak şu sonuca varırız.

Küçük bir prizma parçasını asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 etki edene kadar çevirdiğimizde kayma gerilmeleri sıfırdır.

1.3. Mohr dairesi

F 1 ile bilinen σ_n normal gerilmesini ele alalım.

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + \tau_{xy} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Trigonometri bilgimizi tekrar tazeleyelim;

$$\boxed{\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)} \qquad \boxed{\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)} \qquad \boxed{2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\phi}$$

Bu bağıntıları eğik düzlemindeki normal gerilmeler formülünde yerleştirirsek:

$$\sigma_n = \sigma_x \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \sigma_y \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau\sin 2\varphi$$

ve iç teğet gerilme için; $\tau_{tn} = \tau_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (\sigma_y - \sigma_x)\cos\varphi\sin v$

$$\tau_{tn} = \tau_{xy}\cos 2\varphi + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\varphi$$

$$\tau_{tn} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

Eğer bu iki eşitlik formülünün karesini alıp beraber toplarsak Mohr'un (*mohr*) gerilmeler dairesini buluruz. Bu daire σ_n ve τ_{xz} koordinat sisteminde bulunur:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi\right)^2$$

$$\tau_{tn}^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau\cos 2\varphi\right)^2$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{tn}^2 = (\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi)\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]$$

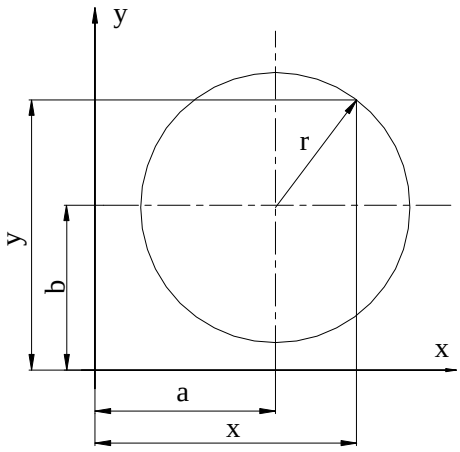
Diğer taraftan $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1$ olduğundan F 26 formülü bulunur.

$$\boxed{\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{tn}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{F 26}$$

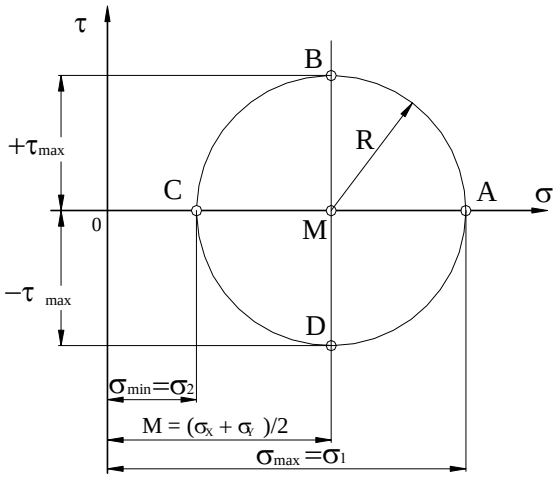
σ_n	MPa	Kesit yüzeyindeki toplam normal gerilme
τ_{tn}	MPa	Kesit yüzeyindeki toplam kayma gerilmesi
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

Daire fomülü: $\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$ F 27

F 26 ile bulunan formülün dairesini ve F 27 ile verilen genel daire fomülü çizelim (bkz Şekil 12) ve F 26 ile F 27 formullerini Tablo 1 de karşılaştıralım:



Şekil 12, Genel daire



Şekil 13, Mohr dairesi

Tablo 1, Daire fomülü ile gerilme fomülünün karşılaştırılması

Genel daire, F 27 ve Şekil 12	Mohr dairesi, F 26 ve Şekil 13
x	σ_n
a	$M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$
$(x - a)^2$	$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2$
y	τ_{tn}
b	0
$(y - b)^2$	$(\tau_{tn} - 0)^2$
r^2	$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$
r	$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Burada b = 0 olması dairenin merkezinin koordinat sisteminin sıfır noktasında olduğunu gösterir.
Bu daire ilk defa Mohr tarafından bulunduğu için "Mohr dairesi" denir.

1.3.1. Mohr dairesinin merkez koordinatları

Tablo 1 ile görülen benzerliklerden şu formülleri kolaylıkla üretiriz:
Mohr dairesinin merkez koordinatları Tablo 1 ile derhal görülür. Mohr dairesinin merkezi daima x-ekseni üzerinde olacağından ordinatı sıfırdır ve apsis değeri F 28 ile bulunur.

$$M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \text{F 28}$$

M	MPa	Mohr dairesi merkezinin x değeri (apsisi), y=0
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme

1.3.2. Mohr dairesinin radyus boyu

Mohr dairesinin radyus boyu Tablo 1 ile derhal görülür ve F 29 ile gösterilmiştir.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{F 29}$$

σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

1.3.3. Asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2

Mohr'un gerilmeler dairesi üzerindeki her nokta parça üzerindeki bir kesiti gösterir (Şekil 12). Bu çember üzerindeki noktada kurulacak koordinat sistemi, o kesitteki iç gerilmeleri "σ ve τ" u gösterir. A ve C noktaları koordinat sisteminin gösterdiği kesitteki maksimum ve minimum iç normal gerilmeleri, diğer deyimi ile asal normal gerilmeleri gösterir. Bu değerleri formülle göstermek istersek Şekil 12 ile görüldüğü gibi şu bağıntıyı buluruz.

$$\sigma_{1,2} = a \pm R$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad \text{F 30}$$

σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

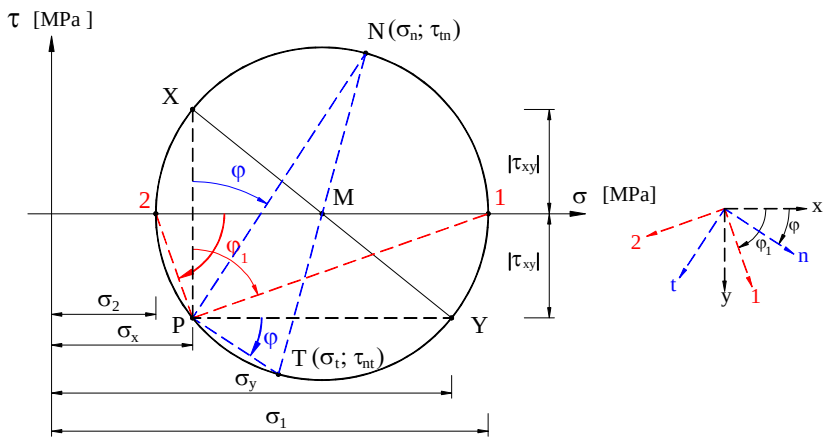
1.3.4. Maksimum kayma gerilmesi τ_{max}

Şekil 12 ile görülen B ve D noktaları maksimum kayma gerilmesini gösterir ve buda Mohr dairesinin radyusuna eşittir.

$$\tau_{max} = R = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{F 31}$$

σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

1.3.5. Mohr dairesininin geometrik yorumlanması



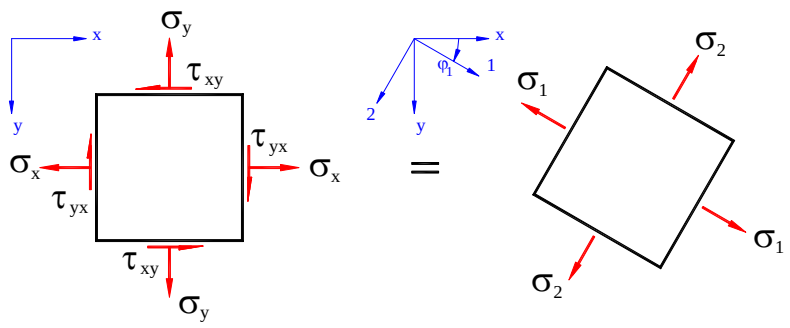
Şekil 14, Mohr dairesi

Şekil 14 ile görülen:

φ açısı; x-ekseni ile eğik düzlemin oluşturduğu açıdır.

φ_1 açısı; x-ekseni ile 1. asal normal gerilme ekseninin oluşturduğu açıdır.

1.4. Asal normal gerilmeler



Şekil 15, Asal normal gerilmeler

Herhangi bir çubuktan küçük bir kısmını aldığımızı (Şekil 15) ve bu parçanın σ_x, σ_y ve τ_{xy} tarafından etkilendiğini kabul edelim. Bu parçayı yavaşca döndürdüğümüzde bir an gelecek belirli bir φ_1 (*fi*) açısında, Normal gerilmelerin (σ_x ve σ_y) birinin en büyük diğerininde en küçük değere vardığında τ_{xy} ninde kaybolduğu, değerinin sıfır olduğu görülecektir. Burada daima $\sigma_1 > \sigma_2$. kabul edilir. Bu arada $\sigma_{max} = \sigma_1$ ve $\sigma_{min} = \sigma_2$ olarak yazılır.

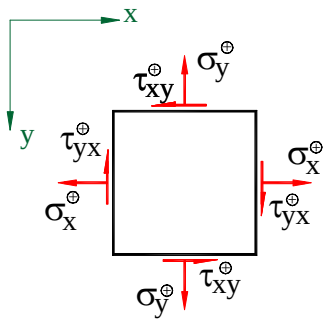
Bu durumada şu tanım yapılır:

*Bir parçada kayma gerilmesi sıfır ve yalnız normal gerilmeler var ise, bu gerilmelere "**asal normal gerilmeler** (σ_1 ve σ_2) " denir.*

Gerilmelerin geometrik yorumlanması Mohr dairesi ile yapılır.

1.4.1. Parçada σ ve τ için ön işaret kuralı

Bir ödevde verilen gerilmelerin (σ_x , σ_y ve $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) ön işaretleri daima aşağıda verilen ön işaret kuralına göre kabul edilecektir.

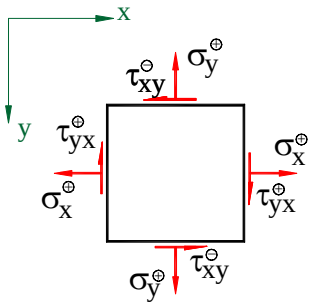


Şekil 16, Parçada σ ve τ

Ön işaret kuralı

1. Çekme gerilmeleri daima pozitiftir.
2. Düzleme inen dikmeler x in veya y nin pozitif koordinat sistemindeki yönlerini gösteriyorlarsa, bu gerilmeler pozitiftir. Eğer kayma etkilediği yüzeyde pozitif y-yönündeyse ve pozitif x-yönünü gösteriyorsa kayma gerilmesi τ_{xy} pozitiftir.

1.4.2. Mohr dairesinde gerilmelerin (σ ve τ) gösterilmesinde ön işaret kuralı



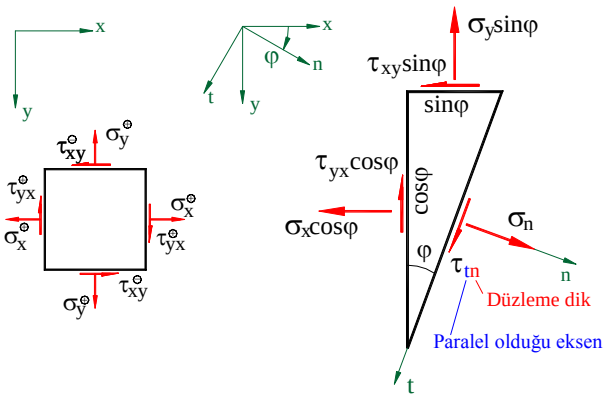
Şekil 17, Mohr dairesinde σ ve τ

Ön işaret kuralı

1. Çekme gerilmeleri daima pozitiftir.
2. Kayma gerilmeleri pozitiftir, eğer parçanın içine göre parçayı saat yönünde döndürüyorsa.
3. Eğer τ_{xy} pozitif ise, τ_{yx} Mohr dairesinde negatif olarak gösterilir. Ön işaret daima bilinenin tersidir.

Yukarıda teorik olarak anlatılan Mohr dairesinin konstrüksiyonunu daha iyi anlayabilmek için basit

bir örneği ele alıp detaylı analizini yaparak Mohr dairesi konstrüksiyonunu anlatmaya çalışalım.



Şekil 18, Parçada gerilmeler

Kabuller veya bilinenler:

$\sigma_x = 70$ MPa

$\sigma_y = 30$ MPa

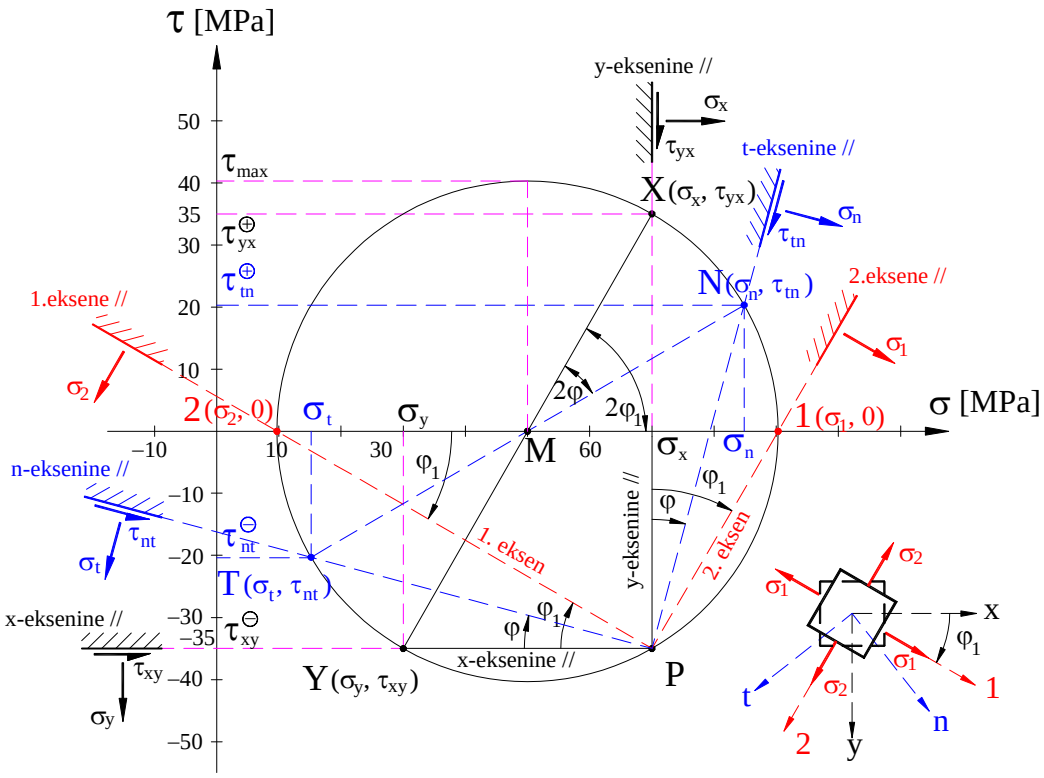
$\tau_{xy} = -35$ MPa

$\tau_{yx} = 35$ MPa

$\varphi = 15°$

1.5. Mohr dairesinin konstrüksiyonu

Mohr dairesinin konstrüksiyonunun bitmiş hali Şekil 19 ile görülmektedir. Kabul edilen apsisi σ, ordinatı τ olan bir koordinat sistemi ele alınır.



Şekil 19, Mohr dairesi konstrüksiyonu

1. ***Bilinen değerlerle X ve Y noktaları ölçekli koordinat sisteminde işaretlenir.***
   Burada $X(\sigma_x, \tau_{yx}) = X(70, 35)$ ve $Y(\sigma_y, \tau_{xy}) = Y(30, -35)$ değerindedir.
2. ***Mohr dairesi merkezi M noktası:***
   X ile Y noktalarını birleştiren doğrunun σ-eksenini kestiği nokta Mohr dairesinin merkezi M noktasıdır. Analitik olarak M noktasının sayısal büyüklüğü F 32 ile hesaplanır:

$$\boxed{M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}} \qquad \text{F 32}$$

σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-eksenindeki normal gerilme

Örnekdeki değerlerle M noktasının sayısal büyüklüğü şöyle hesaplanır:

$$M = \frac{70+30}{2} = 50 \qquad \boxed{M(50,0)}$$ Şekil 19 de işaretlenir.

Mohr dairesi yarıçapı R:

X ile M noktalarını birleştiren doğru Mohr dairesinin yarıçapıdır "R" ve analitik olarak sayısal büyüklüğü F 33 ile hesaplanır:

$$R = \tau_{max}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{F 33}$$

Sayısal olarak Mohr dairesinin yarıçapı ile maksimum kayma gerilmesi aynı değerdedir. Yalnız birim olarak değişiktir.

Maksimum kayma gerilmesi, t_{max}: değeri analitik olarak F 34 ile hesaplanır:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{F 34}$$

σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-eksenindeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

Örnekdeki değerlerle yarıçap R nin sayısal büyüklüğü:

$$R = \sqrt{\left(\frac{70-30}{2}\right)^2 + 35^2} \qquad R = 40{,}311$$ Şekil 19 de işaretlenir ve Mohr dairesi çizilir.

3. *Mohr dairesinde kutup noktası P:*

X noktasından y-eksenine çizilen paralelin, Y noktasından x-eksenine çizilen paraleli kestiği nokta Mohr dairesinde kutup noktası P dir.
Şekil 19 ile görüldüğü gibi P noktasının koordinatları $P(\sigma_x, \tau_{xy})$ dur. Burada P(70,–35) dir.

4. *Asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 (τ=0) ile 1 ve 2 numaralı eksenler:*

1 ve 2 numaralı asal normal gerilmelerin noktaları daima σ-ekseni üzerindedir ve Mohr dairesi ile σ-ekseninin kesiştiği noktalardır. Daima $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ve $1 \geq 2$ olarak adlandırılır.

P – 1 doğrusu 2.eksene paraleldir ve σ_2 nin yönünü gösterir,

P – 2 doğrusu 1.eksene paraleldir ve σ_1 nin yönünü gösterir.

Asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 (τ=0) sayısal büyüklüğü analitik olarak F 35 ile hesaplanır:

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \qquad \text{F 35}$$

σ_1	MPa	1. asal normal gerilme ($\sigma_1 \geq \sigma_2$)
σ_2	MPa	2. asal normal gerilme ($\sigma_2 \leq \sigma_1$)
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

Asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 nin yönleri analitik olarak F 36 ile hesaplanır:

$$\boxed{\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \qquad \text{F 36}$$

φ_1	°	x-ekseni ile 1. eksenin oluşturduğu açı
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi
σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme

Örnekdeki değerlerle φ_1 in sayısal büyüklüğü:

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot (-35)}{30 - 70} = 1{,}750 \qquad \arctan(1{,}750) = 60{,}255^\circ \qquad \boxed{\varphi_1 = 30{,}128^\circ}$$

5. Gerilme noktaları N ve T:

P noktasından t-eksenine çizilen paralelin Mohr dairesini kestiği nokta gerilme noktası N (σ_n,τ_{tn}) P noktasından n-eksenine çizilen paralelin Mohr dairesini kestiği nokta gerilme noktası T (σ_t,τ_{nt}). Bu değerler Şekil 19 ile görüldüğü gibi analitik olarak F 37, F 38 ve F 39 formülleriyle hesaplanırlar.

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + \tau_{xy} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{F 37}$$

$$\boxed{\sigma_t = \sigma_x \cdot \sin^2\varphi + \sigma_y \cdot \cos^2\varphi - \tau_{xy} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{F 38}$$

$$\boxed{\tau_{tn} = \tau_{nt} = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \qquad \text{F 39}$$

σ_x	MPa	x-ekseni yönündeki normal gerilme
σ_y	MPa	y-ekseni yönündeki normal gerilme
τ_{xy}	MPa	Kayma gerilmesi

Örnekdeki değerlerle σ_n , σ_n ve τ_{tn} nin sayısal büyüklüğü hesaplamak istersek:

σ_x = 70 MPa ; σ_y = 30 MPa ; τ_{xy} = –35 MPa ; φ = 15° için;

n-eksenindeki normal gerilme; σ_n = 49,821 MPa

t-eksenindeki normal gerilme; σ_t = 15,179 MPa

Kayma gerilmesi; τ_{tn} = –40,311 MPa τ_{nt} = 40,311 MPa

6. Gerilmelerin diyagramda gösterilmesi ve çizilmesi:

X noktasında normal gerilme σ_x "+" pozitif olduğundan ***"çekme"*** gerilmesidir. Cismin dolu tarafı sol tarafta gösterildiği için gerilme yönü yüzeye dik olarak sağa doğru gösterilir. Kayma gerilmesi τ_{yx} "+" pozitif olduğundan cismin merkezini saat yönünde çeviriyor demektir. Cismin merkezi sol tarafta olduğu için gerilme yönü burada aşağıya doğru çizilir.

N noktasında normal gerilme σ_n "+" pozitif olduğundan ***"çekme"*** gerilmesidir. Cismin dolu tarafı sol tarafta gösterildiği için gerilme yönü yüzeye dik olarak sağa doğru gösterilir. Kayma gerilmesi τ_{tn} "+" pozitif olduğundan cismin merkezini saat yönünde çeviriyor demektir. Cismin merkezi sol tarafta olduğu için gerilme yönü burada aşağıya doğru çizilir.

1 noktasında asal normal gerilme σ_1 "+" pozitif olduğundan ***"çekme"*** gerilmesidir. Cismin dolu tarafı sol tarafta gösterildiği için gerilme yönü yüzeye dik olarak sağa doğru gösterilir. Asal normal gerilmenin olduğu yerde kayma gerilmesi $\tau_1 = 0$ dır.

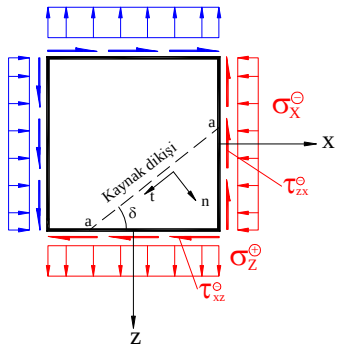
Y noktasında normal gerilme σ_y "+" pozitif olduğundan ***"çekme"*** gerilmesidir. Cismin dolu tarafı yukarı tarafta gösterildiği için gerilme yönü yüzeye dik olarak aşağıya doğru gösterilir. Kayma gerilmesi τ_{xy} "−" negatif olduğundan cismin merkezini saat yönünün tersine çeviriyor demektir. Cismin merkezi yukarı tarafta olduğu için gerilme yönü sağa doğru çizilir.

T noktasında normal gerilme σ_t "+" pozitif olduğundan ***"çekme"*** gerilmesidir. Cismin dolu tarafı yukarı tarafta gösterildiği için gerilme yönü yüzeye dik olarak aşağıya doğru gösterilir. Kayma gerilmesi τ_{nt} "−" negatif olduğundan cismin merkezini saat yönünün tersine çeviriyor demektir. Cismin merkezi yukarı tarafta olduğu için gerilme yönü sağa doğru çizilir.

2 noktasında asal normal gerilme σ_2 "+" pozitif olduğundan ***"çekme"*** gerilmesidir. Cismin dolu tarafı yukarı tarafta gösterildiği için gerilme yönü yüzeye dik olarak aşağıya doğru gösterilir. Asal normal gerilmenin olduğu yerde kayma gerilmesi $\tau_2 = 0$ dır.

1.5.1. Mohr dairesi için pratikten örnek

Mohr dairesinin konstrüksiyonu için pratikten örnek yapalım. Şekil 20 ile verilen bir parçada kaynak dikişi ile birleştirme vardır. Parçada ve parçanın kaynak dikişindeki gerilmelerin analizini yapalım.



Şekil 20, Eğik kaynak dikişli plakada gerilmeler

Şekil 20 ile verilmiş olan eğik kaynak dikişli plakada bilinenler:

$\sigma_x = -20$ MPa

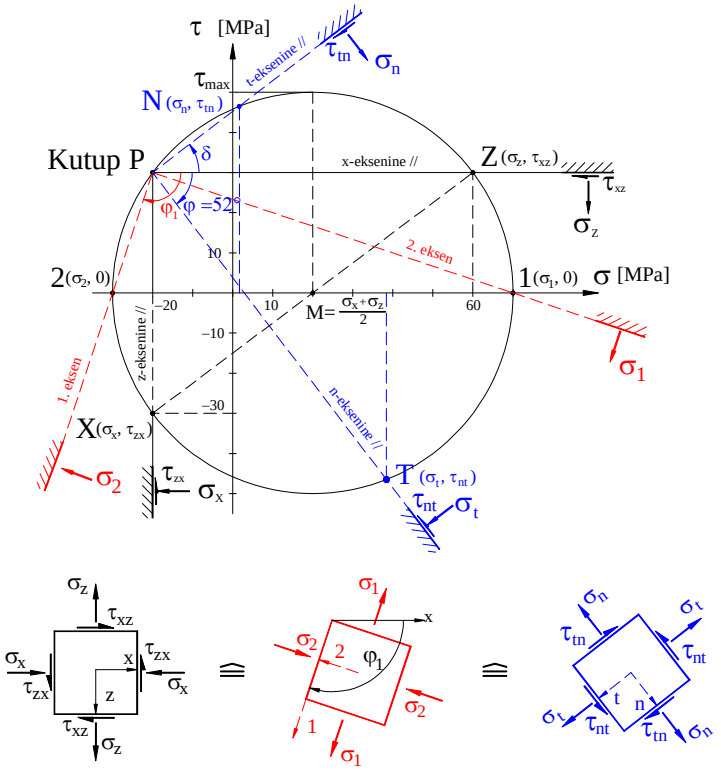
$\sigma_z = 60$ MPa

$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -30$ MPa

$\delta = 38°$

Mohr dairesinin konstrüksiyonunun bitmiş hali Şekil 21 ile görülmektedir. Kabul edilen apsisi σ, ordinatı τ olan bir koordinat sistemi ele alınır.

1. Bilinen değerlerle X ve Z noktaları ölçekli koordinat sisteminde işaretlenir.
Burada $X(\sigma_x, \tau_{xz}) = X(-20, -30)$ ve $Z(\sigma_z, \tau_{zx}) = Z(60, 30)$ değerindedir.



Şekil 21, Eğik kaynak dikişli plaka için Mohr dairesi

2. Mohr dairesi merkezi M noktası:

X ile Z noktalarını birleştiren doğrunun σ-eksenini kestiği nokta Mohr dairesinin merkezi M noktasıdır. Analitik olarak M noktasının sayısal büyüklüğü F 40 ile hesaplanır:

$$\boxed{M = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}} \qquad \text{F 40}$$

σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
σ_z	MPa	z-eksenindeki normal gerilme

Örnekdeki değerlerle M noktasının sayısal büyüklüğü şöyle hesaplanır:

$$M = \frac{-20+60}{2} = 20 \qquad \boxed{M(20\,;0)} \quad \text{işaretlenir (Şekil 21).}$$

Mohr dairesi yarıçapı R bulunur.

X ile M noktalarını birleştiren doğru Mohr dairesinin yarıçapıdır ve analitik olarak sayısal büyüklüğü F 41 ile hesaplanır. Formülde yarı çapın birimi mm olarak seçilmiştir.

$$\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \qquad \text{F 41}$$

Maksimum kayma gerilmesi τ_{max} ın sayısal büyüklüğü F 42 ile hesaplanır.

$$\boxed{\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}} \qquad \text{F 42}$$

σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
σ_z	MPa	z-eksenindeki normal gerilme
τ_{zx}	MPa	Kayma gerilmesi

Örnekdeki değerlerle yarıçap R nin sayısal büyüklüğü:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-20-60}{2}\right)^2 + (-30)^2} \qquad R = 50{,}0 \text{ mm}$$

işaretlenir (Şekil 21) ve Mohr dairesi çizilir. Yukarıda ***Mohr dairesinin konstrüksiyonu*** nda anlatıldığı şekilde aranan değerleri çizim tamamlanır ve diyagramdan okunur (Şekil 21).

$\sigma_1 \approx 70$ MPa , $\sigma_2 \approx -30$ MPa
$\varphi_1 \approx 109°$
$\sigma_n \approx 0{,}5$ MPa , $\sigma_t \approx 39$ MPa , $\tau_{tn} = \tau_{nt} \approx 46$ MPa
$\tau_{max} \approx 50$ MPa

Bu değerler analitik olarakta hesaplanır.

Asal normal gerilmeler *(bkz F 30)* **:** $\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2}$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-20+60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20-60}{2}\right)^2 + (-30)^2} \qquad \boxed{\sigma_1 = 70 \text{ MPa}} \qquad \boxed{\sigma_2 = -30 \text{ MPa}}$$

Asal gerilme yönü $\boldsymbol{\varphi_1}$ *(bkz F 24)*

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot (-30)}{-20-60} = 0{,}75 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1 = 18{,}4° + 90° \qquad \boxed{\varphi_1 = 108{,}4°}$$

Maksimum kayma gerilmesi $\boldsymbol{\tau_{max}}$ *(bkz F 31)*

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{-20-60}{2}\right)^2 + (-30)^2} \qquad \boxed{\tau_{max} = 50 \text{ MPa}}$$

Kaynak dikişi a-a daki gerilmeler:

$\sigma_x = -20$ MPa $\sigma_z = 60$ MPa $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -30$ MPa $\delta = 38°$

Önce burada $\varphi = 90° - \delta$ $\varphi = 52°$ bulunur

σ_n için F 1

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_z \cdot \sin^2\varphi + \tau_{zx} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sigma_n = (-20) \cdot \cos^2 52 + 60 \cdot \sin^2 52 + (-30) \cdot 2 \cdot \sin 52 \cdot \cos 52$$

$$\boxed{\sigma_n = 0{,}568 \text{ MPa}}$$

σ_t için F 2

$$\sigma_t = \sigma_x \cdot \sin^2\varphi + \sigma_z \cdot \cos^2\varphi + \tau_{zx} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sigma_t = (-20) \cdot \sin^2 52 + 60 \cdot \cos^2 52 - (-30) \cdot 2 \cdot \sin 52 \cdot \cos 52$$

$$\boxed{\sigma_t = 39{,}432 \text{ MPa}}$$

$\tau_{tn} = \tau_{nt}$ için F 3 ve F 4

$$\tau_{tn} = \tau_{nt} = (\sigma_z - \sigma_x) \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{zx} \cdot \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

$$\tau_{tn} = \tau_{nt} = (60+20) \cdot \sin 52 \cdot \cos 52 + (-30) \cdot \left(\cos^2 52 - \sin^2 52\right)$$

$$\boxed{\tau_{tn} = \tau_{nt} = 46{,}069 \text{ MPa}}$$

2. Kesitteki gerilmeler

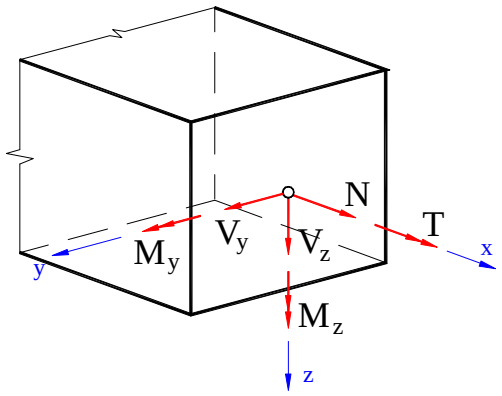
2.1. Genel giriş

Mukavemet değerlerindeki bilgilerimizi tazeleyelim. Homojen, izotrop ve lineer elastik cisimlerde gerilmeler ve esnemeler genel ***Hook*** kanunlarına tabidir. Bu cisimlerde şekil değiştirme işi "U" ve ek iş "U^*" eşittirler ve kuvvet ile kuvvetten oluşan esnemelerle kaymalar birbirleriyle orantılı olup genelde ***Castigliano*** nun kanunlarıyla hesaplanırlar.

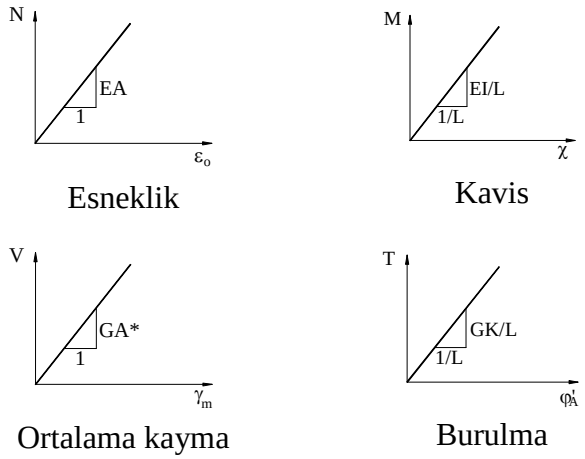
Statik, bilhassa yapı statiğinde problemler genelde gerilmeler ve deformasyonlarının yerine gerilmelerin bileşkesi ve bu bileşkeden oluşan deformasyonlarıyla çözülür. Bunun için genelde bazı basit ön kabuller kullanılır. Örneğin: İnce bir çubuk veya kirişte başlangıçta eksene dik ve düz olan kesit kirişin deforme olması halindede eksene dik ve düz kaldığı vede boylamasındaki liflerin birbirini etkilemeyeceği kabul edilir.

Bu kabuller problemin durumuna göre hesabı yapacak olan kişinin seçimine kalmıştır. Yamanla bu gibi problemleri çözen kişiler tecrübe sahibi olup bu durumlarda çabuk karar vereceklerdir.

Burada kiriş kesit büyüklükleri ile oluşturdukları deformasyonlar detaylı görülecektir.



Şekil 22, Parçada gerilmeler



Şekil 23, Diyagramlar

N	N	Normal kuvvet
V	N	Dik kuvvet
M	Nm	Eğilme momenti
T	Nm	Torsiyon momenti
E	MPa	Elastiklik modülü (N/mm^2)
G	MPa	Kayma modülü (N/mm^2)
L	m	Etkili boy
GA*	N/m^4	Burulma rijitliği
EI	N/m^6	Eğilme rijitliği

ε_0	1	Eksenel esneklik (uzama)
γ_0	1	Ortalama kayma
χ	rad/m	Kavis
φ'_x	rad/m	Burulma
EA	N/m^4	Eğilme
A	m^2	Kesit alanı
A*	m^2	Etkin kayma alanı
J	m^4	Atalet momenti
K	m^4	Torsiyon sabitesi

2.2. Gerilmeler ve deformasyonlar için kabuller ve sonuçları

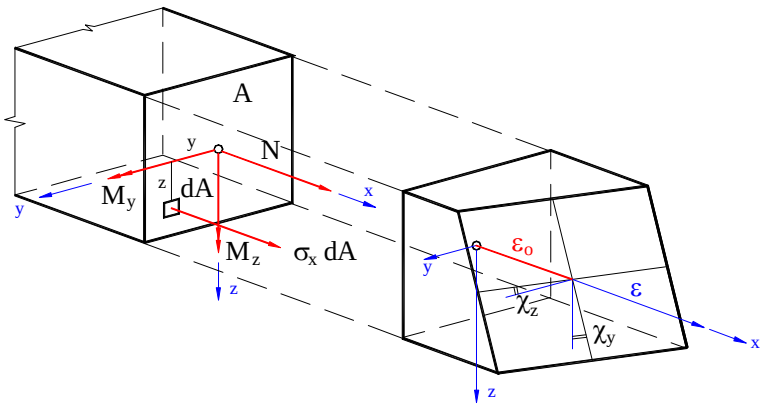
Kabuller:
- Normal kesitlerin çubuk eksenine daima dik ve düz oldukları,
- Malzemenin boyuna liflerinin biribirine etkisinin olmadığı,
- Hook kanununun geçerliliği; $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$.

Sonuçları:
- Gerilme durumu lineer ve yalnız $\sigma_x \neq 0$,
- Esneme dağılımı düz ve genel deformasyon ilkeleri dahilinde (ε_0, χ_y, χ_z.) oluşur.

Bütün bu tanımlama ve kabullere ***"Kiriş teorisi"*** denir.

2.3. Eğilme ve eksenel kuvvet

Genel olarak homojen elastik çubukta kesit büyüklüklerini (gerilmelerini) ve ait olan deformasyonlarını doğrusal kabul ederek durumu ele alırsak, şu bağıntıları buluruz:



Ana eksenlere göre:

$$\left\{\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x \cdot dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA \\ M_z &= \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA \end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y$$

Temel büyüklükler F 43

Şekil 24, Parçada gerilmeler

N	N	Normal kuvvet
$\int_A dA$	1	Belirli A alanı için integralini alma
σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
M_y	N.m	y-eksenine göre eğilme momenti
z	mm	z-değeri
M_z	N.m	z-eksenine göre eğilme momenti
y	mm	y-değeri
ε_x	1	x-yönünde esneme
χ_i	1	i-eksenindeki esnemenin kavis vektörü

Hook kanunlarına uyan malzemenin bilinen değerleriyle yapılmış gerilme – esneme (σ_x ; ε_x) diyagramında, eğer esneme (deformasyon) değeri biliniyorsa, basit integrasyon işlemiyle gerilme değeri bulunur.

Bunun tersinde önce çıkış büyüklüklerinin bir bölümünü tahmin edip $\{\varepsilon_0, \chi_y, \chi_z\}$ diğer değerleri $\{N, M_y, M_z\}$ hesaplayıp, bunu yeteri kadar doğrulukta sonuç bulana kadar tekrar ederek (iterasyon) bir çözüm bulunur.

Hook kanunları dahilinde lineer elastik malzemeler için değişmeyen şu bağıntı yazılır:

$$\boxed{\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x} \qquad \text{F 44}$$

σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
E	MPa	Elastiklik modülü
ε_x	1	Esneme

Bu durumda F 43 ile şu bağıntılar yazılır:

$$\boxed{\begin{aligned} N &= E \cdot \left[\varepsilon_0 \cdot \int dA + \chi_y \cdot \int z \cdot dA - \chi_z \cdot \int y \cdot dA\right] \\ M_y &= E \cdot \left[\varepsilon_0 \cdot \int z \cdot dA + \chi_y \cdot \int z^2 \cdot dA - \chi_z \cdot \int y \cdot z \cdot dA\right] \\ M_z &= E \cdot \left[-\varepsilon_0 \cdot \int y \cdot dA + \chi_y \cdot \int y \cdot z \cdot dA - \chi_z \cdot \int y^2 \cdot dA\right] \end{aligned}} \qquad \text{F 45}$$

Veya matris olarak şu eşitlik yazılır.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} \int_A dA & \int_A z \cdot dA & -\int_A y \cdot dA \\ \int_A z \cdot dA & \int_A z^2 \cdot dA & -\int_A y \cdot z \cdot dA \\ -\int_A y \cdot dA & -\int_A y \cdot z \cdot dA & \int_A y^2 \cdot dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix}$$

N	N	Normal kuvvet
E	MPa	Elastiklik modülü
ε_0	1	Etki yönünde doğrudan esneme
$\int_A dA$	1	Belirli A alanı için integralini alma
χ_i	1	i-eksenindeki esnemenin kavis vektörü
σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
M_y	N.m	y-eksenine göre eğilme momenti
z	mm	z-değeri
M_z	N.m	z-eksenine göre eğilme momenti
y	mm	y-değeri

Ana eksenler y, z ve şu bağıntılar kabul edilirse;

$$\int_A y \cdot dA = \int_A z \cdot dA = \int_A y \cdot z \cdot dA = 0$$

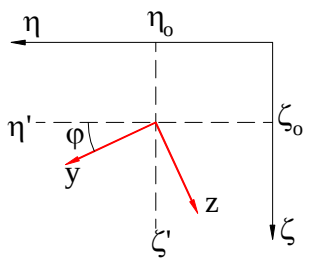
F 45 ile verilen formüller şu şekli alırlar:

$$\boxed{N = E \cdot A \cdot \varepsilon_o \quad ; \quad M_y = E \cdot J_y \cdot \chi_y \quad ; \quad M_z = E \cdot J_z \cdot \chi_z} \qquad \text{F 46}$$

Burada

$$\boxed{A = \int_A dA \quad ; \quad J_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad ; \quad J_z = \int_A y^2 \cdot dA} \qquad \text{F 47}$$

Ana eksenler (y ; z) koordinatlar dönüşümüyle deviasyon eksenleri η ve ζ olan koordinat sistemi verirler.



Şekil 25, η ve ζ için

Önce φ = 0 kabul edersek:

$$y = \eta - \eta_0 \quad ; \quad z = \zeta - \zeta_0$$

$$y = (\eta - \eta_o) \cdot \cos\varphi + (\zeta - \zeta_o) \cdot \sin\varphi$$

$$z = -(\eta - \eta_o) \cdot \sin\varphi + (\zeta - \zeta_o) \cdot \cos\varphi$$

ve böylece:

$$\int y \cdot dA = \int \eta \cdot dA - \eta_0 \cdot A \qquad \int z \cdot dA = \int \zeta \cdot dA - \zeta_0 \cdot A$$

Bu bağıntılardanda ağırlık merkezinin deviasyon eksenlerine göre koordinatları bulunur.

$$\boxed{\eta_o = \frac{\int \eta \cdot dA}{A}} \quad ; \quad \boxed{\zeta_o = \frac{\int \zeta \cdot dA}{A}} \qquad \text{F 48}$$

η_0	mm	ağırlık merkezinin deviasyon eksenine göre apsisi
$\int dA$	1	A alanı için integralini alma
η	mm	η değeri
ζ_0	mm	ağırlık merkezinin deviasyon eksenine göre ordinatı
ζ	mm	ζ değeri

2.3.1. Atalet momentleri

Genel olarak atalet momentlerini şu şekilde gösterebiliriz.

$$\boxed{J = \begin{bmatrix} J_y & C_{yz} \\ C_{yz} & J_z \end{bmatrix}} \qquad \text{F 49}$$

Eğer $\varphi \neq 0$ ve kabul edersek ordinat ve apsis değerlerini F 50 ile yazarız:

$$\boxed{y = \eta' \cdot \cos\varphi + \zeta' \cdot \sin\varphi \qquad z = -\eta' \cdot \sin\varphi + \zeta' \cdot \cos\varphi} \qquad \text{F 50}$$

Deviasyon momentinin genel formülü F 51 ile görülmektedir.

$$\boxed{C_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA} \qquad \text{F 51}$$

Formül F 50 ile verilen değerleri F 51 ye yerleştirirsek deviasyon momenti bulunur, bkz F 52:

$$C_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA = \int_A (\eta' \cdot \cos\varphi + \zeta' \cdot \sin\varphi) \cdot (-\eta' \cdot \sin\varphi + \zeta' \cdot \cos\varphi) \cdot dA = 0$$

$$\boxed{C_{yz} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \int_A (\zeta'^2 - \eta'^2) \cdot dA + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \cdot \int_A \eta' \cdot \zeta' \cdot dA = 0} \qquad \text{F 52}$$

Eğer deviasyon momentini $C_{yz} = 0$ $\left(\int_A yz \cdot dA = 0\right)$ kabul edersek ana yön φ_1 in formülü bulunur:

$$\tan(2\varphi_1) = \frac{-2 \cdot \int_A \eta' \cdot \zeta' \cdot dA}{-\int_A \eta'^2 \cdot dA + \int_A \zeta'^2 \cdot dA}$$

Burada: $J_{\eta'} = \int_A \zeta'^2 \cdot dA$; $J_{\zeta'} = \int_A \eta'^2 \cdot dA$ ve $C_{\eta'\zeta'} = \int_A \eta' \cdot \zeta' \cdot dA$ kabul edilirse;

$$\boxed{\tan(2\varphi_1) = \frac{-2 \cdot C_{\eta'\zeta'}}{-J_{\zeta'} + J_{\eta'}}} \qquad \text{F 53}$$

Eğer $\int_A y \cdot dA = \int_A z \cdot dA = 0$ ise;

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\int_A \eta \cdot dA - \eta_o \cdot A\right] \cdot \cos\varphi + \left[\int_A \zeta \cdot dA - \zeta_o \cdot A\right] \cdot \sin\varphi = 0 \\ -\left[\int_A \eta \cdot dA - \eta_o \cdot A\right] \cdot \sin\varphi + \left[\int_A \zeta \cdot dA - \zeta_o \cdot A\right] \cdot \cos\varphi = 0 \end{array} \right\}$$

Bu denklemleri tanφ ve cotφ ile çarpar vede toplarsak:

$$\frac{1}{\cos\varphi} \cdot \left[\int_A \eta \cdot dA - \eta_o \cdot A\right] = 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \left[\int_A \zeta \cdot dA - \zeta_o A\right] = 0$$

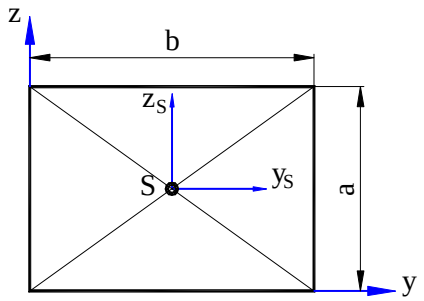
Genel dönüşüm formülleri:

$$\boxed{\begin{array}{l} J_y = \int z^2 \cdot dA = J_{\eta'} \cdot \cos^2\varphi + J_{\zeta'} \cdot \sin^2\varphi - 2 \cdot C_{\eta'\zeta'} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ J_z = \int y^2 \cdot dA = J_{\eta'} \cdot \sin^2\varphi + J_{\zeta'} \cdot \cos^2\varphi + 2 \cdot C_{\eta'\zeta'} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ C_{yz} = \int yz \cdot dA = (J_{\eta'} - J_{\zeta'}) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + C_{\eta'\zeta'} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{array}} \qquad \text{F 54}$$

veya matris olarak şu eşitlik yazılır.

$$\begin{Bmatrix} J_y \\ J_z \\ C_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} J_{\eta'} \\ J_{\zeta'} \\ C_{\eta'\zeta'} \end{Bmatrix}$$

2.3.1.1. Çeşitli kesitlerde atalet momentleri



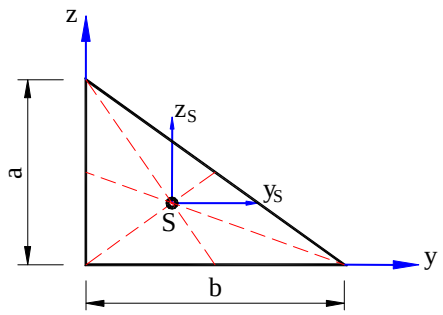
Şekil 26, Dik dörtgen kesit

Ağırlık merkezine göre atalet momentleri:

$$J_{y_S} = \frac{a^3 \cdot b}{12} \qquad J_{z_S} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

Kenar koordinat eksenlerine göre atalet momentleri ve deviasyon momenti:

$$J_y = \frac{a^3 \cdot b}{3} \qquad J_z = \frac{a \cdot b^3}{3} \qquad C_{yz} = -\frac{a^2 \cdot b^2}{4}$$



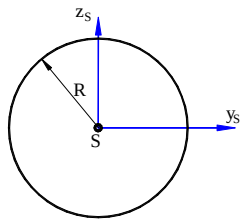
Şekil 27, Üçgen kesit

Ağırlık merkezine göre atalet momentleri ve deviasyon momenti:

$$J_{y_S} = \frac{a^3 \cdot b}{36} \qquad J_{z_S} = \frac{a \cdot b^3}{36} \qquad C_{y_S z_S} = -\frac{a^2 \cdot b^2}{72}$$

Kenar koordinat eksenlerine göre atalet momentleri ve deviasyon momenti:

$$J_y = \frac{a^3 \cdot b}{12} \qquad J_z = \frac{a \cdot b^3}{3} \qquad C_{yz} = -\frac{a^2 \cdot b^2}{24}$$

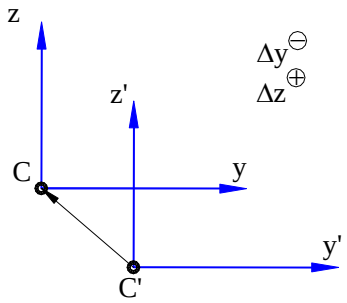


Şekil 28, Daire kesit

Ağırlık merkezine göre atalet momentleri:

$$J_{y_S} = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \qquad J_{z_S} = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$$

Steiner'e göre atalet momentleri



Şekil 29, Steiner'e göre atalet momentleri

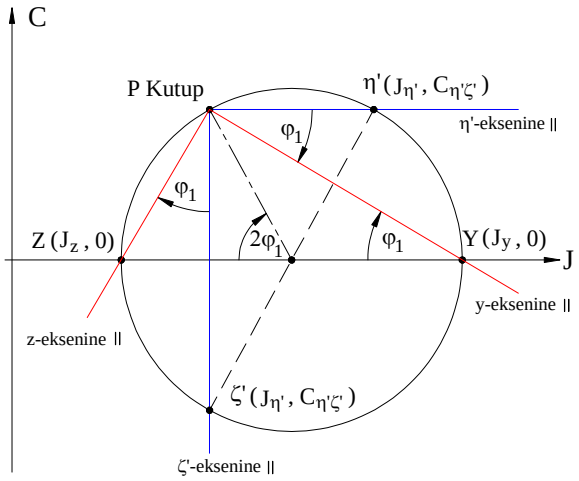
Atalet momentleri ve deviasyon momenti:

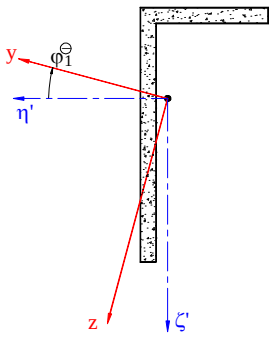
$$J_{y'} = J_y + (\Delta z)^2 \cdot A$$

$$J_{z'} = J_z + (\Delta y)^2 \cdot A$$

$$C_{y'z'} = C_{yz} + \Delta y \cdot \Delta z \cdot A$$

Deviasyon momenti C nin ön işaretine kadar, gerilme ve deformasyonlarının dönüşümü analogtur. bundan dolayıda Mohr dairesi ile gösterilir.





Burada: $J_y > J_z$

φ^+ ters saat yönünde

Şekil 30, Atalet momentleri için Mohr dairesi ve genel kurallar

Asal atalet momentleri:

$$\boxed{J_{y,z} = \frac{J_{\eta'} + J_{\zeta'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{\eta'} - J_{\zeta'}}{2}\right)^2 + C_{\eta'\zeta'}^2}} \qquad \text{F 55}$$

Asal atalet momentlerinin yönü:

$$\boxed{\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'} - J_{\zeta'}}} \qquad \text{F 56}$$

İdeal eylemsizlik momentleri:

$$\boxed{J_y = \int z^2 \cdot n \cdot dA \qquad \text{ve} \qquad J_z = \int y^2 \cdot n \cdot dA} \qquad \text{F 57}$$

2.3.2. Normal gerilmelerin genel formülü

F 43 ve F 46 ile normal gerilmelerin genel formülü F 58 bulunur.

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot (\varepsilon_o + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y)$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y \quad ; \quad \sigma_x = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{z \cdot z_A}{i_y^2} + \frac{y \cdot y_A}{i_z^2}\right)} \qquad \text{F 58}$$

veya matris olarak şu eşitlik yazılır.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix}$$

Bunun yanında: $y_A = -\frac{M_z}{N}$, $z_A = -\frac{M_y}{N}$ Statik eşdeğer kuvvetin etki noktaları

$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$, $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$ Eylemsizlik radyusları

$\sigma_x = 0$ ise nötr ekseni formülü bulunur:

$$\boxed{\frac{y \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_A}{i_y^2} + 1 = 0} \qquad \text{F 59}$$

2.3.3. Eğilme çizgisi

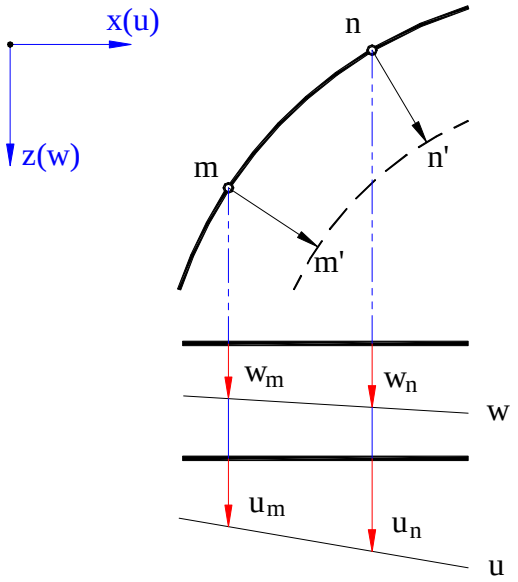
Eğilme çizgisi:

Bir kirişin/çubuğun nötr ekseni noktalarının belirli bir yöndeki kayma bileşenlerinin oluşturduğu çizgidir.

Eğilme çizgisini:

- Kirişin diferansiyel denklemi ile,
- Mohr analoğu ile,
- İş denkleminin nokta nokta prensibi ile,

hesaplayabiliriz.



Şekil 31, Eğilme çizgisi

2.3.3.1. Kirişin diferansiyel denklemi ile sehim

Bildiğimiz tanımlamaları hatırlayalım:

Temel bilgilerden: $M = -E \cdot J \cdot w''$ $\qquad \dfrac{d^2M}{dx^2} + q = M'' + q = -(E \cdot J \cdot w'')'' + q = 0$

$$M_y = -E \cdot J_y \cdot \chi_y$$

F 80 $$U(\gamma_{xz}) = \int_x \int_A \frac{G}{2} \cdot \gamma_{xz}^2 \cdot dA \cdot dx = \int_x \int_A \frac{V_z^2 \cdot S^2}{2 \cdot G \cdot b^2 \cdot J_y^2} \cdot dA \cdot dx$$

F 82 $$U(\gamma_{xz}) = \int_x \frac{V_z^2}{2 \cdot G \cdot A^*} \cdot dx$$

F 128 $$\chi_y = \alpha_T \cdot \frac{T_u - T_o}{h}$$

Bu formüllerden kirişin genel diferansiyel denklemi F 60 bulunur:

$$\boxed{-\frac{d^2}{dx^2} \cdot \left(E \cdot J_y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \cdot \left\{ E \cdot J_y \cdot \left[\alpha_T \cdot \frac{T_u - T_o}{h} - \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{V_z}{G \cdot A^*} \right) \right] \right\} + q = 0} \qquad \text{F 60}$$

Kirişin diferansiyel denklemi: $$-\frac{d^2}{dx^2}\cdot\left(E\cdot J_y\cdot\frac{d^2w}{dx^2}\right)+q=0$$

Kavis: $$\chi\approx-\frac{d^2w}{dx^2} \qquad \text{veya} \qquad \chi\approx -w''$$

Ortalama kayma: $$\gamma_m = V_z/\left(G\cdot A^*\right)$$

değerleri w' ye şu katkıda bulunur:

$$\boxed{\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_y}{E\cdot J_y}-\alpha_T\cdot\frac{T_u-T_o}{h}+\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{V_z}{G\cdot A^*}\right)} \qquad \text{F 61}$$

Kirişin genel diferansiyel denklemi F 60 homojen olmayan dördüncü dereceden katsayıları değişken diferansiyel denklemdir ve numerik yoldan çözülür. Bunun karşıtı olarak F 62 ile görülen kirişin basitleştirilmiş diferansiyel denkleminin katsayıları sabittir ve çözümü genel olarak F 63 ile görülmektedir.

$$\boxed{w^{IV}=\frac{d^4w}{dx^4}=\frac{q}{E\cdot J}} \qquad \text{F 62}$$

w^{IV}	1	w nin 4. dereceden türevini alma
q	N/mm	Yayılı yükün birim değeri
E	N/mm^2	Elastiklik modülü (MPa)
J	mm^4	Ait olduğu eksene göre atalet (eylemsizlik) momenti

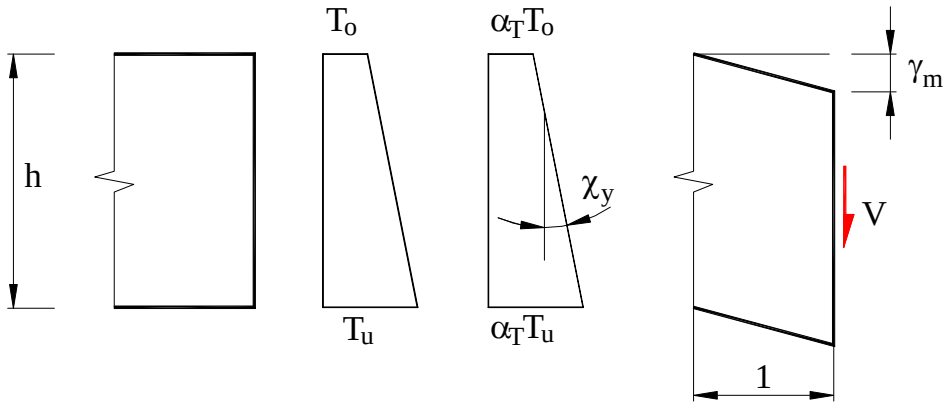
Burada "E.J = sabit" kabul edilir.

$$\boxed{w=w_{part}+C_1\cdot x^3+C_2\cdot x^2+C_3\cdot x+C_4} \qquad \text{F 63}$$

Homojen olmayan "w_{part}" diferansiyel denklemi genelde basit kabullerle hesaplanır.

Kavis χ_y ile genelleme:

$$\boxed{\chi_y=-w''=\frac{M}{E\cdot J}+\alpha_T\cdot\frac{T_u-T_o}{h}-\left(\frac{V}{G\cdot A^*}\right)'} \qquad \text{F 64}$$



Şekil 32, Kavis χ_y ile genelleme

$$-\left(E\cdot J\cdot w''\right)'' - \left\{E\cdot J\cdot\left[\alpha_T\cdot\frac{T_u-T_o}{h}-\left(\frac{V}{G\cdot A^*}\right)\right]\right\}'' + q = 0 \qquad \text{F 65}$$

E	N/mm^2	Elastiklik modülü (MPa)
J	mm^4	Ait olduğu eksene göre atalet (eylemsizlik) momenti
w''	1	w nin 2. dereceden türevini alma
α_T	mm/°	Isıl genleşme katsayısı
T_u	°	Parçanın alt kenarının sıcaklığı
T_o	°	Parçanın üst kenarının sıcaklığı
h	mm	Parçanın yüksekliği
V	N	Çapraz kuvvet
G	N/mm^2	Kayma modülü (MPa)
A^*	mm^2	Etkin kayma alanı
q	N/mm	Yayılı yükün birim değeri

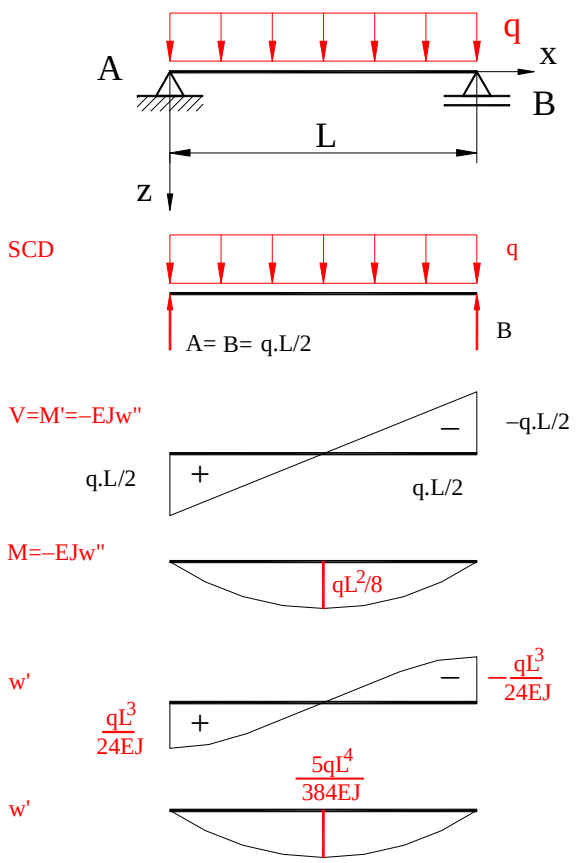
Burada E.J homojen olarak alınmıştır. E.J nin homojen olmaması halinde, homojen olmayan dördüncü dereceden diferansiyel denklemler numerik yoldan çözülürler.

Mohr analoğu ile kirişin sehimi için Kesit büyüklüklerinde Mohr analojisi kısmına bakınız.

İş denklemi ile kirişin sehimi için İş denklemi kısmına bakınız

2.3.3.2. Örnekler

1. Yayılı yük ile zorlanan klasik kiriş



Şekil 33, Yayılı yük ile zorlanan klasik kiriş

Kabül: $$w_{part} = \frac{q\cdot x''}{24\cdot E\cdot J}$$

F 62 tamamen geçerliyse F 63 ile görülen C_1 den C_4 e kadar integral sabitleri için, sınır şartları ile şu değerler bulunur.

$$w_{x=0} = w''_{x=0} = w_{x=L} = w''_{x=L} = 0$$

$$C_1 = -\frac{q\cdot L}{12\cdot E\cdot J} \quad ; \quad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q\cdot L^3}{24\cdot E\cdot J} \quad ; \quad C_4 = 0$$

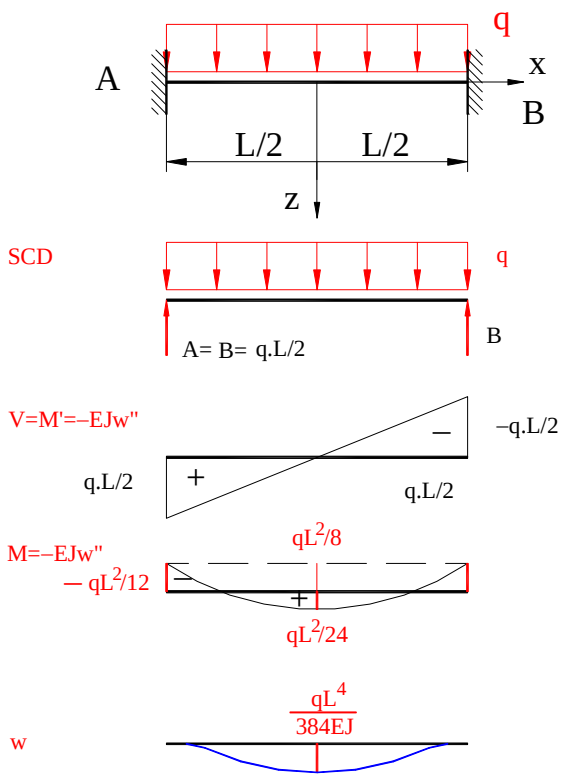
Bu değerleri F 63 a yerleştirirsek x için sehim w değeri bulunur:

$$w_x = \frac{q}{24\cdot E\cdot J}\cdot\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3x\right)$$

Bulunur ve bu formüllede x = L/2 için maksimum değer bulunur.

$$\boxed{w_{x=L/2} = \frac{5\cdot q\cdot L^4}{384\cdot E\cdot J}}$$

2. Yayılı yük ile zorlanan iki ucu sabit kiriş



Şekil 34, Yayılı yük ile zorlanan iki ucu sabit kiriş

Yayılı yük ile zorlanan klasik kirişteki kabül buradada geçerlidir:

$$w_{part} = \frac{q \cdot x''}{24 \cdot E \cdot J}$$

z-eksenine göre sistemin ve yükün simetrik olmasından ötürü:

$$C_1 = C_3 = 0$$

sınır şartları ilede şu eşitlik bulunur.

$$w_{x=L/2} = w'_{x=L/2} = 0$$

İntegral sabitleri C_2 ve C_4 ün değerleri:

$$C_2 = -\frac{q \cdot L^2}{48 \cdot E \cdot J} \quad ; \quad C_4 = -\frac{q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J}$$

Bu değerleri F 63 a yerleştirirsek x için sehim w değeri bulunur:

$$w_x = \frac{q}{384 \cdot E \cdot J} \cdot \left(16x^4 - 8L^2x^2 + L^4\right)$$

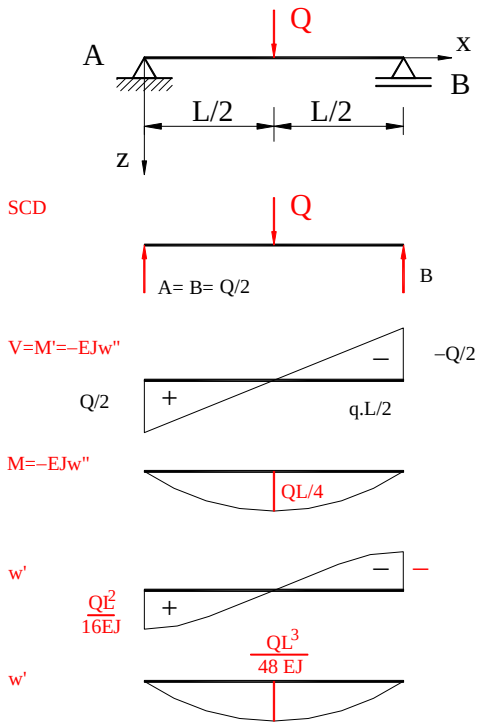
Bulunur ve bu formüllede x = 0 için maksimum değer bulunur.

$$\boxed{w_{x=0} = \frac{q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J}}$$

$M = -EJw''$ eşitliğinden x için moment:

$$\boxed{M_x = \frac{q \cdot L^2}{24} \cdot \left(1 - \frac{12x^2}{L^2}\right)}$$

3. Ortadan tek yük ile zorlanan klasik kiriş



Şekil 35, Ortadan tek yük ile zorlanan klasik kiriş

$0 \le x \le L/2$ aralığı için sınır şartları ile şu değerler bulunur.

$$w_{x=0} = w'_{x=0} = 0$$

Simetri şartına göre:

$$w'_{x=L/2} = 0$$

Sıçrama şartına göre:

$$-E \cdot J \cdot w'''_{(x=L/2)} + Q = 0$$

ve $w_{part} = 0$ ile çözüm:

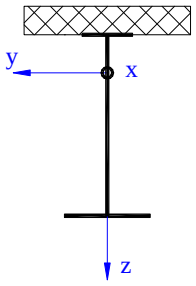
$$w_x = \frac{Q}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \left(3L^2x - 4x^2\right)$$

Bu formüllede L/2 için maksimum değer bulunur.

$$\boxed{w_{x=L/2} = \frac{Q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J}}$$

2.3.4. Homojen olmayan kesitte eğilme ve eksenel kuvvet

Homojen olmayan kesitte eğilme ve eksenel kuvvetin analizini yapacak olursak (bkz Şekil 36);



Şekil 36, Homojen olmayan kesit

Elastiklik modülü;

$$E(y,z) = E_o \cdot n(y,z)$$

E_o	MPa	Elastiklik modülü
n	1	Birleşim değeri

Hatırlanan diğer formüller:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA \qquad M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA \qquad M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

Böylece normal kuvvet ile eğilme momentlerini F 45 ye analog şu şekilde formüle edebiliriz:

$$N = E_o \cdot \left[\varepsilon_o \cdot \int_A n \cdot dA + \chi_y \cdot \int_A n \cdot z \cdot dA - \chi_z \cdot \int_A n \cdot y \cdot dA \right]$$

$$M_y = E_o \cdot \left[\varepsilon_o \cdot \int_A n \cdot z \cdot dA + \chi_y \cdot \int_A n \cdot z^2 \cdot dA - \chi_z \cdot \int_A n \cdot y \cdot z \cdot dA \right] \qquad \text{F 66}$$

$$M_z = E_o \cdot \left[-\varepsilon_o \cdot \int_A n \cdot y \cdot dA - \chi_y \cdot \int_A n \cdot y \cdot z \cdot dA + \chi_z \cdot \int_A n \cdot y^2 \cdot dA \right]$$

Ana eksenler ve çeşitli değerler:

$$\int_A n \cdot y \cdot dA = \int_A n \cdot z \cdot dA = \int_A n \cdot y \cdot z \cdot dA = 0 \text{ ise:}$$

$$N = E_o \cdot A_i \cdot \varepsilon_o \qquad M_y = E_o \cdot J_{yi} \cdot \chi_y \qquad M_z = E_o \cdot J_{zi} \cdot \chi_z$$

$$A_i = \int_A n \cdot dA \qquad J_{yi} = \int_A n \cdot z^2 \cdot dA \qquad J_{zi} = \int_A n \cdot y^2 \cdot dA \qquad \text{F 67}$$

F 66 ve F 67 sembollerinin tanımlanması:

N	N	Normal kuvvet
E_o	MPa	Elastiklik modülü
A_i	mm^2	İndisine göre ait olduğu alan
ε_0	1	Etki yönünde doğrudan esneme
M_y	Nmm	y-eksenine göre eğilme momenti
J_i	mm^4	İndisine göre ait olduğu eksene göre atalet momenti
χ_i	1	i-eksenindeki esnemenin kavis vektörü
M_z	Nm	z-eksenine göre eğilme momenti
$\int_A dA$	1	Belirli A alanı için integralini alma
n	1	Birleşim değeri
z	mm	z-değeri
y	mm	y-değeri

2.4. Çapraz kuvvet

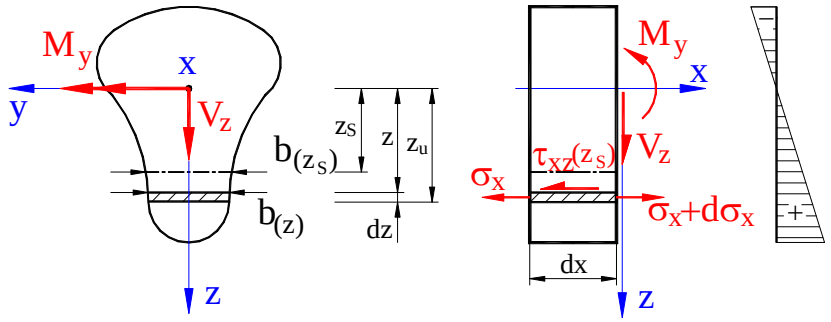
2.4.1. Çapraz kuvvetin yaklaşık incelenmesi

Çapraz kuvvet etkisindeki dört köşe çubuğun şekil değiştirmesini basitce incelersek, özel eğilme durumuyla yaklaşık olarak buluruz. ***Bernoulli***'nin kabulüne göre $\gamma_{zx} = 0$ ve böylece $\tau_{zx} = 0$ olur ve $V_z = 0$ olması gerekir. Fakat bu gerçek çapraz kuvvet ile çelişkiye düşer. Şöyle ki:

$$\boxed{V_z = \int \tau_{zx} \cdot dA} \qquad \text{F 68}$$

V_z	N	z yönünde çapraz kuvvet
τ_{zx}	MPa	z yönünde x-eksenine dik kayma gerilmesi
$\int dA$	1	A ya göre integralini alma

Şekil 37 ile görüldüğü gibi herhangi bir çubuğun küçük bir parçasını analizini yapar ve x-yönünde kuvvetler denge denklemini yazarsak F 69 formülünü buluruz.



Şekil 37, Çapraz kuvvetlerin oluşturduğu deformasyonların kaba analizi

$$\boxed{-\tau_{xz}(z_s)\cdot b(z_s)\cdot dx + \int_{z_s}^{z_u} d\sigma_x(z)\cdot b(z)\cdot dz = 0} \qquad \text{F 69}$$

$\tau_{zx}(z_s)$	MPa	Ağırlık merkezine z mesafesinde kayma gerilmesi
$b(z_s)$	mm	Ağırlık merkezine z mesafesindeki en
$\int_{z_s}^{z_u} dz$	1	z ye göre integralini z_s ile z_u arsında alma
$d\sigma_x(z)$	MPa	x yönünde z mesafesindeki kısmı normal gerilme
$b(z)$	mm	z mesafesindeki en

Diğer taraftan şu bağıntılarla meşhur ***"Bisquit"*** formülü bulunur:

$\sigma_x = \dfrac{M_y \cdot z}{J_y}$ z mesafesinde $\dfrac{d\sigma_x(z)}{dx} = \dfrac{dM_y}{dx}\cdot\dfrac{z}{J_y} = V_z \cdot \dfrac{z}{J_y}$ buradan $V_z = \dfrac{dM_y}{dx}$ bulunur.

"Bisquit" formülü

$$\boxed{\tau_{xz}(z_s) = \frac{V_z \cdot S(z_s)}{b(z_s)\cdot J_y}} \qquad \text{F 70}$$

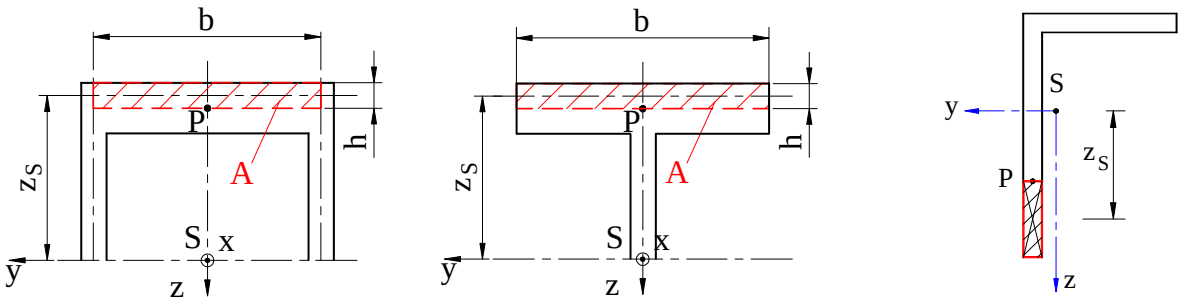
$\tau_{zx}(z_s)$	MPa	Ağırlık merkezine z mesafesinde kayma gerilmesi
V_z	N	z yönünde çapraz kuvvet
$S(z_s)$	mm^3	Ağırlık merkezine göre statik moment
$b(z_s)$	mm	z_s mesafesindeki en
J_y	mm^4	y- eksenine göre atalet momenti

2.4.2. Statik moment

Çapraz kuvvet z-yönünde ise z-eksenine göre herhangi bir noktanın statik momenti genelde F 71 ile pratikte aşağıda verilen iekillere göre hesaplanır:

$$S(z_S) = \int_{z_s}^{z_u} z \cdot b(z) \cdot dz \qquad \text{F 71}$$

2.4.2.1. Statik moment hesapları örneği

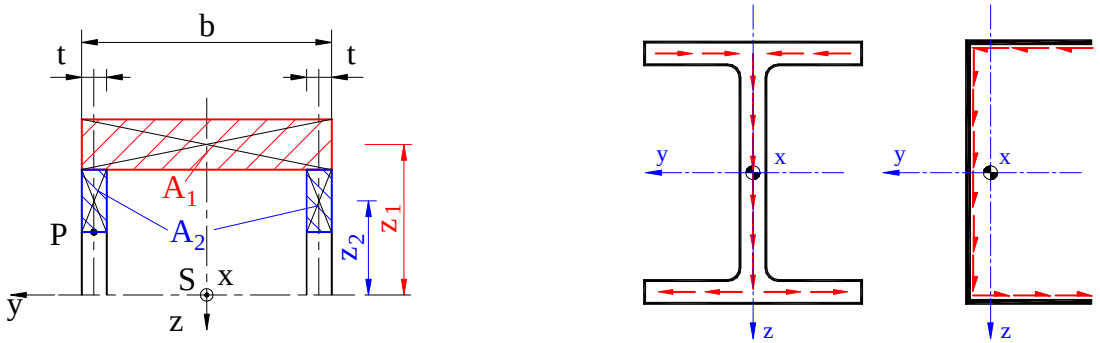


Şekil 38, Statik moment

Ağırlık y-eksenine göre P noktası için statik moment:

$$S_{yP} = z_S \cdot A \qquad \text{F 72}$$

S_{yP}	mm^3	P noktası için ağırlık merkezine göre z-yönünde statik moment
z_S	mm	Ağırlık merkezleri mesafesi
A	mm^2	Statik momenti hesaplanacak alan



a) Statik moment b) Yağmur suyu kuralı

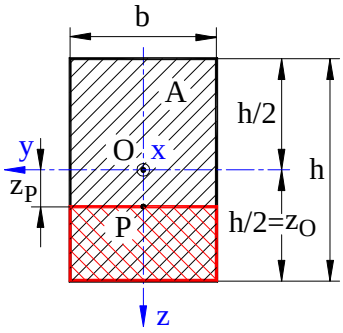
Şekil 39, Statik moment ve yağmur suyu kuralı

$$S_{yP} = z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 \qquad \text{F 73}$$

S_{yP}	mm^3	P noktası için ağırlık merkezine göre z-yönünde statik moment
z_i	mm	Ağırlık merkezleri mesafesi
A_i	mm^2	Statik momenti hesaplanacak alan
b	mm	Statik momenti hesaplanacak alanın genişliği
h	mm	Statik momenti hesaplanacak alanın yüksekliği

Şekil 39 c ile kayma gerilmelerini ***"yağmur suyu kuralı"*** na göre yönleri gösterilmiştir. Örnek olarak I-Profilinin üst kuşağındaki kayma gerilimi "τ_{yx}" y-yönünde, x-eksenine dik. Her nekadar y-ekseninede dikse, genelde x-eksenine dik kabul edilir. I-Profili dikmesindeki kayma gerilimi "τ_{zx}" z-yönünde, x-eksenine dik.

Dik dörtgen şekilli kesitin statik momentini formül F 71 ile hesaplayalım, Şekil 40 :



Şekil 40, Dikdörtgen şekilli kesit

Burada b(z) = sabit olduğundan F 71 şu şekli alır:

$$S_{yP} = b\int_{z_P}^{z_O} z \cdot dz$$

$$S_{yP} = b\int_{z_P}^{z_O} \frac{z^2}{2}$$

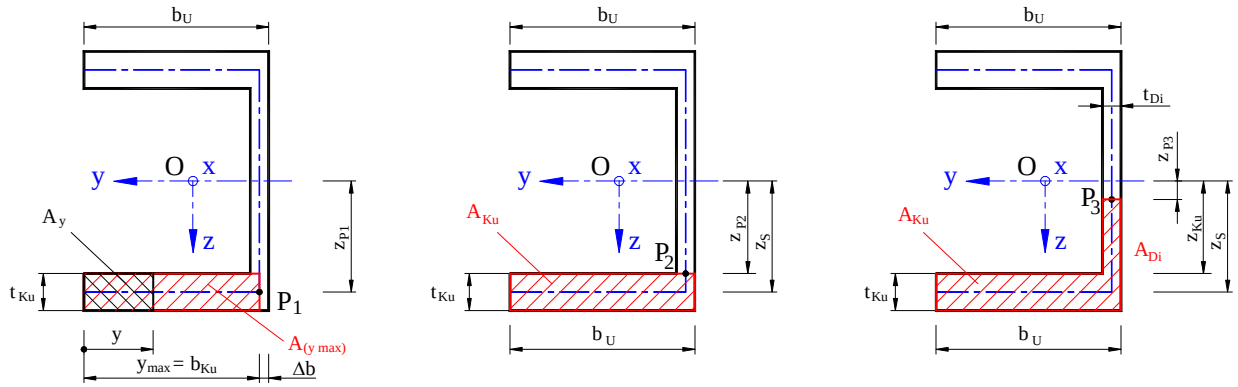
$$S_{yP} = \frac{b}{2}\cdot\left(z_O^2 - z_P^2\right)$$

Burada $z_O = h/2$ değerini yerleştirirsek,formül F 74 i buluruz:

$$\boxed{S_{yP} = \frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4} - z_P^2\right)} \qquad \text{F 74}$$

b	mm	Statik momenti hesaplanacak alanın genişliği
h	mm	Statik momenti hesaplanacak alanın yüksekliği
z_P	mm	Statik momenti hesaplanacak noktanın mesafesi

Yatık U-profilin analizi



a) b) c)

Şekil 41, Yatık U-profilinde statik moment

Şekil 41 ile görülen yatık U-profilinde çeşitli noktalardaki statik momentler şu şekilde hesaplanır:

P1 noktası alt kuşakta bir noktadır. Yağmur suyu kuralına göre kesme gerilmesi τ_{yx} dir ve statik momenti S_{P1}:

Şekil 41 a, için :

$$\boxed{S_{P1} = z_{P1}\cdot A_{y\,max} = z_{P1}\cdot t_{Ku}\cdot b_{Ku}} \qquad \text{F 75}$$

P2 noktası dikmede bir nokta kabul edilirse, yağmur suyu kuralına göre kesme gerilmesi τ_{zx} dir ve statik momenti S_{P2}:

Şekil 41 b, için :

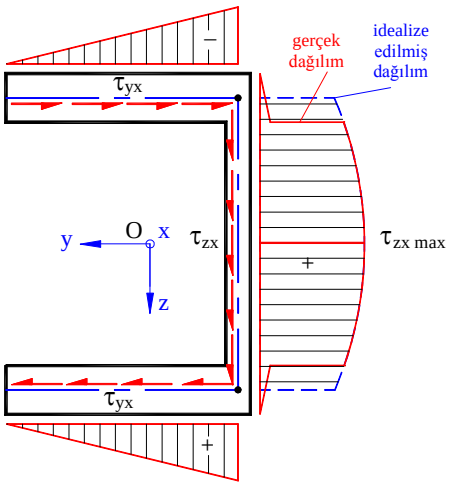
$$\boxed{S_{P2} = z_S\cdot A_{Ku} = z_{P1}\cdot t_{Ku}\cdot b_U} \qquad \text{F 76}$$

P3 noktası dikmede bir noktadır. Yağmur suyu kuralına göre dikmede kesme gerilmesi τ_{zx} ve kuşakta τ_{zx} dir. P3 noktasının statik momenti S_{P3}:

Şekil 41 c, için :

$$\boxed{S_{P3} = z_S\cdot A_{Ku} + 0{,}5\cdot\left(z_{Ku} + z_{P3}\right)\cdot\left(z_{Ku} - z_{P3}\right)\cdot t_{Di}} \qquad \text{F 77}$$

$$\boxed{S_{P3} = z_S\cdot A_{Ku} + 0{,}5\cdot\left(z_{Ku}^2 - z_{P3}^2\right)\cdot t_{Di}} \qquad \text{F 78}$$

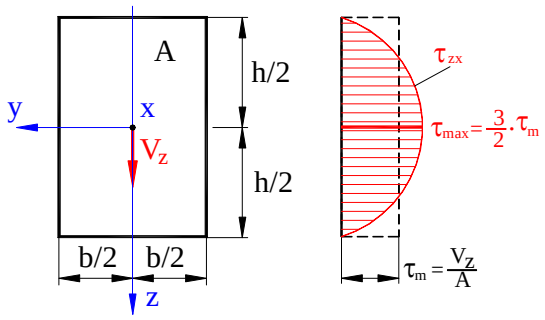


Şekil 42, Yatık U-profilinde kesme gerilmesinin dağılımı

Şekil 42 ile yatık U-profilinde kesme gerilmesinin gerçek ve idealize edilmiş dağılımı ve kesme gerilmesinin yönü görülmektedir.

2.4.3. Uygulama örneği

Dört köşe kesitte kayma gerilmesi "τ_{zx}" parabol olarak kesitin yüksekliğine yayılır.



Şekil 43, Dikdörtgen kesit

Dikdörtgen şekilli kesit

$$A = b \cdot h \qquad J_y = b \cdot h^3 / 12 \qquad S = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$\tau_{xz}(z_s) = \frac{V_z \cdot S(z_s)}{b(z_s) \cdot J_y} = \frac{V_z \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot 12}{2 \cdot b \cdot b \cdot h^3}$$

Burada bu formülü sadeleştirirsek F 79 formülünü buluruz.

$$\boxed{\tau_{xz}(z_s) = \frac{V_z}{b \cdot h} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)} \qquad \text{F 79}$$

$\tau_{zx}(z_s)$	MPa	Ağırlık merkezine z mesafesinde kayma gerilmesi
V_z	N	z yönünde çapraz kuvvet
b	mm	Kesitin eni
h	mm	Kesitin yüksekliği
z	mm	Kesitte gerilmesinin arandığı mesafe

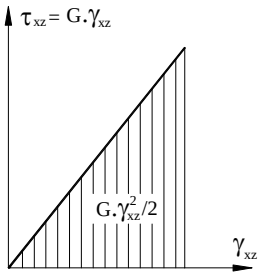
Ortalama kayma gerilmesi $\tau_m = V_z / A = V_z /(b.h)$ olarak hesaplanır.

Burada F 79 ile kayma gerilmesi: z = 0 ise $\tau_{zx}(z_s) = 3\ \tau_m / 2$ dir.

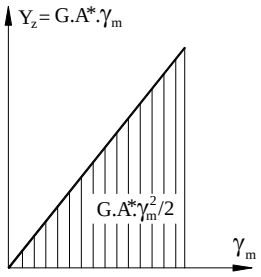
z = h/2 ise $\tau_{zx}(z_s) = 0$ dır.

2.4.4. Şekil değiştirme işi "U" ya kısa bakış

Formül F 70 ile görülen kayma gerilmesi "τ_{xz}" ve ileride göreceğimiz kayma değeri "γ_{xz}" ***"şekil değiştirme işi"***nin hesaplanmasını mümkün kılar. Şöyle ki:



Şekil 44, Parçada "U"



Şekil 45, Kesitde "U"

Şekil 44 ve Şekil 45 ile görülen şekil değiştirme işi şu formüllerle hesaplanır:

$$U(\gamma_{xz}) = \int_x \int_A \frac{G}{2} \cdot \gamma_{xz}^2 \cdot dA \cdot dx$$

$$\boxed{U(\gamma_{xz}) = \int_x \int_A \frac{G}{2} \cdot \gamma_{xz}^2 \cdot dA \cdot dx = \int_x \int_A \frac{V_z^2 \cdot S^2}{2 \cdot G \cdot b^2 \cdot J_y^2} \cdot dA \cdot dx} \qquad \text{F 80}$$

Etkin kayma alanı A* formül F 81 ile bulunur. Bu alan çapraz kuvveti taşıyan ve kayma gerilmelerinin hesabında kullanılan alandır.

$$\boxed{A^* = \frac{1}{\int_A \frac{S^2}{b^2 \cdot J_y^2} \cdot dA}} \qquad \text{F 81}$$

F 80 ve F 81 ile verilen semboller.

$U(\gamma_{xz})$	Nmm	Şekil değiştirme işi
V_z	N	z yönünde çapraz kuvvet
S	mm^3	Statik moment
G	N/mm^2	Kayma modülü (MPa)
b	mm	Kesitin eni
J_y	mm^4	y- eksenine göre atalet momenti
A*	m^2	Etkin kayma alanı

Etkin kayma alanını yukarıdaki formüle (F 80) yerleştirirsek formül F 82 bulunur.

$$\boxed{U(\gamma_{xz}) = \int_x \frac{V_z^2}{2 \cdot G \cdot A^*} \cdot dx} \qquad \text{F 82}$$

$U(\gamma_{xz})$	Nm	Şekil değiştirme işi
V_z	N	z yönünde çapraz kuvvet
G	N/mm^2	Kayma modülü (MPa)
A*	m^2	Etkin kayma alanı

Dikdörtgen kesitin etkin kayma alanı şu şekilde hesaplanır:

$$\frac{1}{A^*} = \int_A \frac{S^2}{b^2 \cdot J_y^2} \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^2 \cdot \left(h^4 - 8 \cdot h^2 \cdot z^2 + 16 \cdot z^4\right) \cdot 144}{4 \cdot 16 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot h^6} = \frac{9}{4 \cdot b \cdot h^6} \cdot \left[h^4 z - \frac{8}{3} h^2 z^3 + \frac{16}{5} z^5\right]$$

ve $\frac{1}{A^*} = \frac{6}{5 \cdot bh}$

$$\boxed{A^* = \frac{5}{6} \cdot A} \qquad \text{F 83}$$

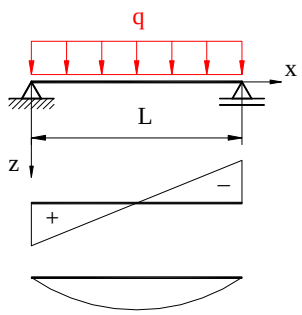
A^*	m^2	Etkin kayma alanı
A	m^2	Kesitin hakiki alanı

Kaymadan oluşan şekil değiştirme işi, normal gerilmeler ve esnemelerden oluşan şekil değiştirme işine oranla çok küçük olduğundan çoğu zaman hesaplarda dikkate alınmazlar. Esnemelerden oluşan şekil değiştirme işini F 84 ile hesaplayabiliriz.

$$\boxed{U(\varepsilon_x) = \int_x \int_A \frac{E}{2} \cdot \varepsilon_x^2 \cdot dA \cdot dx = \int_x \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_z^2}{EJ_z} \right) \cdot dx} \qquad \text{F 84}$$

$U(\varepsilon_x)$	Nmm	Şekil değiştirme işi
$\int_x \int_A dA \cdot dx$		Belirli A alanı ve belirli x değeri için integralini alma
E	N/mm^2	Elastiklik modülü (MPa)
ε_x	1	z yönünde esneme
$\int_x dx$	1	Belirli x değeri için integralini alma
N	N	Normal kuvvet
A	mm^2	Kesit alanı
M_i	Nmm	İndisine göre ait olduğu eksendeki eğilme momenti
J_i	mm^4	İndisine göre ait olduğu eksendeki atalet momenti

Eşit olarak yayılı yükle "q" zorlanan dört köşe kesitli basit kirişi ele alıp kayma ***şekil değiştirme işi*** "U(γ)" ile "U(σ)" yı karşılaştıralım ve orantılarını görelim, Şekil 46.



Şekil 46, q ile zorlanan kiriş

Poison sayısı ν = 0,3 , L=10h ve b = 1 birim kabul edilirse:

$$V_z = \frac{q}{2} \cdot (L - x) \ldots \qquad U_\gamma = \int_0^L \frac{V_z^2}{2GA^*} \cdot dx \qquad \boxed{U_\gamma = \frac{q^2 \cdot L^3}{24 \cdot G \cdot A^*}}$$

$$M_y = \frac{q}{2} \cdot (L - x) \cdot x \ldots U_\sigma = \int \frac{M_y^2}{2EJ_y} \cdot dx \qquad \boxed{U_\sigma = \frac{q^2 \cdot L^5}{240 \cdot E \cdot J_y}}$$

Burada "U(γ)" ile "U(σ)" nın orantısını yazarsak:

$$\frac{U_\gamma}{U_\sigma} = \frac{10 \cdot E \cdot J_y}{G \cdot A^* \cdot L^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot (1+\nu) \cdot 6}{12 \cdot 5} \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2 \qquad \boxed{\frac{U_\gamma}{U_\sigma} = 2 \cdot (1+\nu) \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2}$$

Bu formüle değerleri yerleştirirsek: $\boxed{\frac{U_\gamma}{U_\sigma} = \frac{2{,}6}{100} = 2{,}6\%}$ buluruz.

Hatırlatma:

- Şekil değiştirme işi "U" hesaplanırken σ (ve ε) ile hesaplanan değeri ile τ (ve γ) ile değeri karşılaştırıldığında τ (ve γ) ile hesaplanan değer çok küçük olduğundan dikkate alınmazlar ve şekil değiştirme işi "U" yalnız σ (ve ε) ile hesaplanır. Bu bilhassa ince çubukların hesabında münakaşasız hemen kabul edilir.
- Tam ve doğru gerilme dağılımları için bilginizi veya literatürdeki verileri dikkate alınız.
- Bisquit fomülü (F 70) ince cidarlı kesitlerdede geçerlidir.

2.4.5. Elastiklik teorisi

Kiriş teorisine göre toplam gerilmeler N, M_y ve M_z ile toplam deformasyonlar ε_0, χ_y ve χ_z ***"Genel gerilmeler"*** ile ***"Genel deformasyonlar"*** dan söz edilir. Çapraz kuvvetler dengeden dolayı oluşan ***"Genel reaksiyonlar"*** diye tanımlanırlar ve deformasyon ile kayma oluşturmayan, şekil değiştirme işinede katkısı çok küçük olduğundan dikkate alınmayan kuvvetler olarak kabul edilirler.

Kayma gerilmeleri cisimde belli bir kesit deformasyonu oluşturur ve buda kiriş teorisine göre F 46 ile hesaplanan değere belirli bir ek gerilme katar. Kiriş teorisinin uyuşma şartında kaba bir yaklaşımla $\partial^2\varepsilon_x / \partial y^2 = 0$ kabul eder (ε_x in kesit boyunca lineer dağılımı) ve bunu F 99 a yerleştirir ve kuvvet dağılımına göre doğru kabul edilecek bir kararla sol taraftaki ikinci toplanan terimi dikkate almayıp yok sayarsak, $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, $\sigma_y = 0$ ve $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$ dan dolayı F 85 bulunur.

$$\boxed{\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} = \frac{E}{G} \cdot \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\, \partial y}} \qquad \text{F 85}$$

$\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}$	1	σ_x fonksiyonunun "y" ye göre kısmi türevini alma
E	N/mm^2	Elastiklik modülü (MPa)
G	N/mm^2	Kayma modülü (MPa)

Şimdiye kadar kullandığımız koordinat ekseni z ile y nin yeri değiştirilir ve F 70 formülüne yerleştirilirse dört köşe kesit için F 86 bulunur.

$$\boxed{\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} = \frac{E \cdot q \cdot y}{G \cdot J_z}} \qquad \text{F 86}$$

$\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}$	1	σ_x fonktionunun "y" ye göre kısmi türevini alma
E	N/mm^2	Elastiklik modülü (MPa)
q	N/mm	Yayılı yükün birim kuvveti
y	mm	y değeri
G	N/mm^2	Kayma modülü (MPa)
J_z	mm^4	z-eksenindeki atalet momenti

Diferansiyel denklem F 86 , F 87 ile verilen formülle icra edilir.

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y + \Delta\sigma_x} \qquad \text{F 87}$$

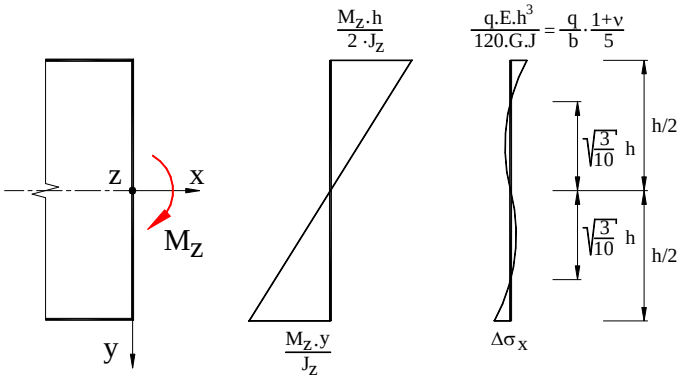
Burada $\Delta\sigma_x$:

$$\boxed{\Delta\sigma_x = \frac{q \cdot E}{120 \cdot G \cdot J} \cdot \left(20 \cdot y^3 - 3 \cdot y \cdot h^2\right)} \qquad \text{F 88}$$

M_z	Nmm	z-eksenindeki eğilme momenti
J_i	mm^4	İndisine göre ait olduğu eksendeki atalet momenti
y	mm	y değeri
$\Delta\sigma_x$	N/mm^2	x yönünde normal gerilme artışı
q	N/mm	Yayılı yükün birim kuvveti
E	N/mm^2	Elastiklik modülü (MPa)
G	N/mm^2	Kayma modülü (MPa)

Ek gerilmeler $\Delta\sigma_x$ iç gerilmelerdir ve x boyunca sabit olup kesitin sonuna kadarda sabit kaldıkları

kabul edilir. ***St. Venant*** prensibine göre bu kabul tıknaz olmayan kirişlerde (L/h≥4) önemli bir rol oynamaz.



Şekil 47, q ile zorlanan kiriş

Burada aynı zamanda:

$$\int_A \Delta\sigma\cdot dA=\int_A y\cdot\Delta\sigma\cdot dA=0 \text{ ve}$$

yayılı yük q için $M_z=\frac{q\cdot L^2}{8}$ dir.

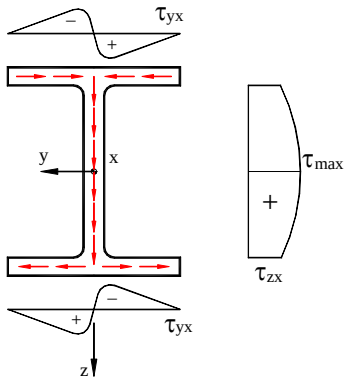
$$\frac{q\cdot E\cdot h^3\cdot 2\cdot J}{120\cdot G\cdot J\cdot M_z\cdot h}=\frac{4\cdot(1+\nu)}{15}\cdot\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

ν=0,3 ve L=10.h için 0,35% bulunur.

Formül F 70 ın türemesinde kayma gerilmelerinin "τ_{xz}" kesit boyunca eşit dağıldığı kabul edilmişti. Elastiklik teorisinde bu yaklaşımının yüksek dikdörtgen kesitlerde (h>2b) doğru olduğu ortaya çıkar. Plakalarda ise (b>>h) bu durum oldukça büyük farklılık verir.

2.4.5.1. İnce cidarlı profillerde elastiklik teorisi

Cisimde kesit x-eksenine dikse formül F 85 pratikte kullanılabilecek doğruya yakın sonuçlar verir.



Şekil 48, I-profilinde elastiklik teorisi

I-profilinde τ_{zx} veya τ_{yx} değerlerini bulmak için, kesit profil dikmesine veya kuşaklara dik olarak seçilir.
y-eksenine göre statik momentler S kesite göre oluşan momentlerdir.
Çelik konstrüksiyon hesaplarında kayma gerilmesi kontrolü genelde plastiklik teorisine göre şöyle yapılır:

$$\tau=\frac{V_z}{A_w}$$

Burada "A_w = profil dikmesi alanı" olarak kabul edilir.

Etkin kayma alanı formül F 81 aşağı yukarı $A^* \approx A_w$ verir. İnce cidarlı profillerde U_γ nın değeri dikkate alınmamasına rağmen, dolu profillerde U_γ nın değeri U_σ değeri ile beraber dikkate alınır.
Asimetrik kesitlerde, örneğin: köşebent profillerde, ana eksenler yerine kesit kenarlarına paralel eksenlerle çalışmak daha avantajlı ve rahattır. Kenarlara paralel eksenlerle çalışmada F 70 değişerek F 89 ile görülen hali alır.

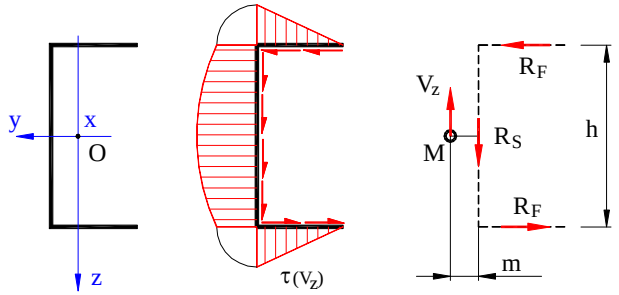
$$\boxed{\tau=\frac{V_{\zeta'}}{t}\cdot\frac{J_{\zeta'}\cdot S_{\eta'}-C_{\eta'\zeta'}\cdot S_{\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}} \qquad \text{F 89}$$

τ	N/mm^2	Kayma gerilmesi
$V_{\zeta'}$	N	ζ' yönündeki çapraz kuvvet
t	mm	Cidar kalınlığı
J_i	mm^4	İndisine göre ait olduğu eksendeki atalet momenti
S_i	mm^3	İndisine göre ait olduğu eksendeki Statik moment
C_{ij}	Nm	İndisine göre ait olduğu eksendeki deviasyon momenti

Diğer büyüklükler detaylı olarak ***"Çekirdek"*** paragrafında görülecektir.

2.4.6. Torsiyon merkezi

Tanımı: Profilin torsiyon merkezi toplam çapraz kuvvetin profile torsiyon zorlaması olmadan etki gösterdiği noktadır. Yani çapraz kuvvet etkisinde profilde torsiyon (burulma) etkisi olmaz.



Şekil 49, U-profili kuvvet analizi

Şekil 49 ile verilmiş olan U-profilinin kuvvet dağılımı analizini yaparsak:

"R_F" kuvvetleri kuşaklarda "τ_{yx}" gerilmesini oluşturur.

R_S kuvveti dikmedeki gerilmeyi oluşturur. Bu kuvvet "V_z" kuvvetine eşittir.

Şekil 49 ile görüleceği gibi kuvvetlerin dengesi için "M" noktasında bir kuvvete gerek vardır. Bu "M" noktasına profilin ***"Torsiyon merkezi"*** denir.

Şekil 49 ile görülen sistemde dikme ağırlık merkezi için moment denge denklemini kuralım:

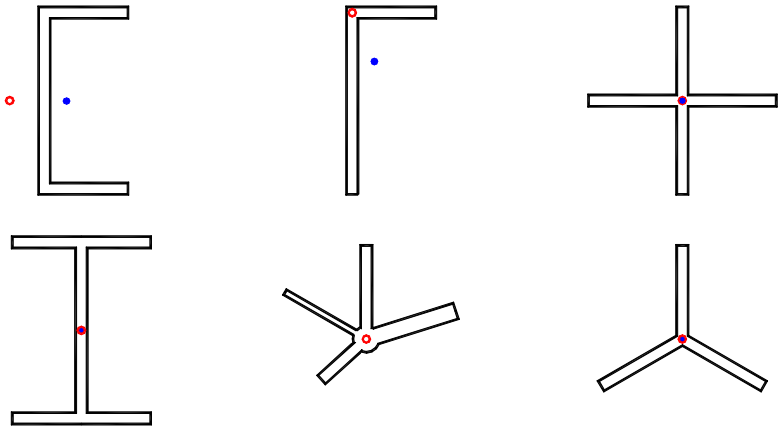
$$R_F \cdot \frac{h}{2} + R_F \cdot \frac{h}{2} - V_z \cdot m = 0 \qquad \text{buradan} \qquad m = \frac{R_F \cdot h}{V_z}$$

Aynı zamanda z-yönünde kuvvetlerin denge denkleminden $\Sigma F_z = 0$ dan $V_z = R_S$ bulunur. Böylece U-profilinin (Şekil 49) "M" noktasının dikme yüzeyi ağırlık merkezine mesafesi formül F 90 ile bulunur:

$$\boxed{m = \frac{R_F \cdot h}{R_S}} \qquad \text{F 90}$$

m	mm	R_S nin M ye mesafesi
R_F	N	U profilinin kuşağını zorlayan kuvvet
h	mm	U profilinin kuşaklar ağırlık merkezleri mesafesi
R_S	N	U profilinin dikmesini zorlayan kuvvet

Eğer "V_z" kuvveti dikmeye paralel ve profili "M" noktasından zorluyorsa, kesitte ***torsiyonsuz*** eğilme zorlaması oluşur. Kiriş teorisine göre normal gerilmeler dağılımı eğer çapraz kuvvet torsiyon merkezi "M" noktasında etkiliyse olur. U-profilinde profilin ağırlık merkezi "O" ile torsiyon merkezi "M" iki ayrı noktadır.



Şekil 50, Çeşitli profillerde torsiyon merkezi

İnce cidarlı, yıldız şeklindeki profillerde torsiyon merkezi eksenlerin kesiştiği noktadadır.
Herhangi bir simetrik profil kesitinde profil kolları ince cidarlı kabul edilirse torsiyon noktası kolay bulunur.

Diğer benzer kesit şekilleri için literatüre bakınız.

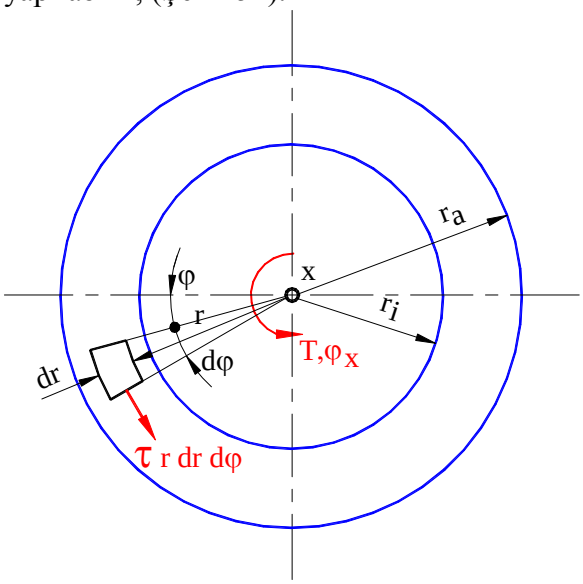
Kalın cidarlı profillerde çok karışık ve zor hesaplama gerekir.

2.5. Torsiyon

2.5.1. Dönüş torsiyonu (St.Venant)

Torsiyon gerilmesinin genel hesabı elastiklik teorisi ile yapılır.

Yuvarlak şekilli dolu veya kaval kesitte torsiyon kayma gerilmesinin hesabı elementer işlemle yapılabilir, (Şekil 51).



Şekil 51, Dönüş torsiyonu (St.Venant)

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{\tau}{G} \quad \text{böylece:}$$

$$T = \int_A \tau \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\varphi = G \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot \int_{r_i}^{r_a} r^3 \cdot dr$$

Buradan: $T = G \cdot J_P \cdot \varphi'_x$

$$J_P = \frac{\pi}{2} \cdot \left(r_a^4 - r_i^4\right) \quad \text{yerleştirirsek:}$$

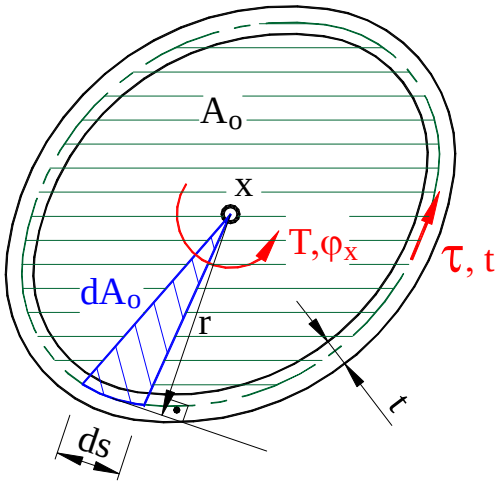
$$\tau = \frac{T}{J_P} \cdot r \quad \text{bulunur.}$$

Diğer bütün kesit şekilleri için torsiyon sabitesi "K" torsiyon atalet momenti J_P ye eşit olmaz.

$$\boxed{K \neq J_P}$$

2.5.2. İnce cidarlı kaval profiller

İnce cidarlı kaval profillerde torsiyon gerilmesini ***Bredt***'e göre hesaplamak pratikte yeterlidir.



Şekil 52, İnce cidarlı profil

Kayma gerilmesi "τ" cidarın orta noktasında ve cidar kalınlığında eşit olarak dağıldığını kabul edelim.

Kayma gerilmesi akımı "S = τ.t = sabit" ve torsiyon momenti T nin hiç bir şekilde normal gerilme oluşturmadığını kabul edelim.

Böylece şu eşitlikleri yazabiliriz:

$$T = \oint r \cdot S \cdot ds = S \cdot \oint r \cdot ds = 2 \cdot S \cdot \oint dA_o$$

$$\boxed{T = 2 \cdot A_o \cdot S} \qquad \text{F 91}$$

Torsiyon momenti T den x ekseni yönündeki kayma:

$$\gamma = r \cdot \varphi_x$$

Formül F 91 ye kayma gerilmesi akımı "$S = \tau_t \cdot t_{min}$" u yerleştirir ve bunu kayma gerilmesi "τ_t" ye çözersek kayma gerilmesini ***Bredt***'e göre kabaca hesaplama formülünü buluruz. Formül F 92.

$$T = 2 \cdot A_o \cdot \tau_t \cdot t_{min}$$

Bredt formülü

$$\boxed{\tau_t \approx \frac{T}{2 \cdot A_o \cdot t_{min}}} \qquad \text{F 92}$$

T	Nmm	Torsiyon momenti
A_o	mm^2	İnce cidarlı kaval profilin ortalama alanı
t_{min}	mm	Kaval profilin en ince cidarı

Kayma $\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + r \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{\tau_{sx}}{G} = \frac{T}{2 \cdot A_o \cdot G \cdot t_{min}}$ $\gamma_{xs} = \frac{\tau_{sx}}{G}$ Hook a göre

$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + r \cdot \frac{d\varphi_x}{dx}$ ele alıp iki tarafı aynen genişletelim:

$\oint \gamma_{xs} \cdot ds = \oint \frac{\partial u}{\partial s} \cdot ds + \oint r \cdot \frac{\partial \varphi_x}{dx} \cdot ds$ $\oint \gamma_{xs} \cdot ds = \oint \frac{\partial u}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial \varphi_x}{dx} \oint r \cdot ds$

Burada: $\oint \frac{\partial u}{\partial s} \cdot ds = 0$ ve $\int r \cdot ds = 2 \cdot A_o$ dır. Bu değerleri yerleştirirsek:

$$\oint \gamma_{xs} \cdot ds = 0 + \frac{\partial \varphi_x}{dx} \cdot 2 \cdot A_o$$

$$\boxed{\oint \gamma_{xs} \cdot ds = 2 \cdot A_o \cdot \frac{\partial \varphi_x}{dx}} \qquad \text{F 93}$$

$\oint ds$	1	Kavise göre integralini alma
A_o	mm^2	İnce cidarlı kaval profilin ortalama alanı
$\partial \varphi_x / dx$	1	φ_x fonktionunun "x" e göre kısmi türevini alma

Diğer taraftan başta ***Hook*** a göre $\gamma_{xs} = \frac{\tau_{sx}}{G}$ demiştik, buraya ***Bredt***'e göre kayma gerilmesini yerleştirir ve γ_{xs} değerini F 93 formülüne yerleştirirsek:

$$\gamma_{xs} = \frac{T}{2 \cdot A_o \cdot t_{min} \cdot G}$$

$$\frac{T}{2 \cdot A_o \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t_{min}} = 2 \cdot A_o \cdot \frac{\partial \varphi_x}{dx}$$

Bu formülü $\partial \varphi_x / dx$ e çözelim:

$$\boxed{\frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{T}{4 \cdot A_o^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t_{min}}}$$

Burada torsiyon sabitesi $K = \frac{4 \cdot A_o^2}{\oint \frac{ds}{t}}$ olarak kabul edilince formül F 94 bulunur.

$$\boxed{\frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{T}{G \cdot K}} \qquad \text{F 94}$$

$d\varphi_x / dx$	1	φ_x fonktionunun "x" e göre türevini alma
T	Nmm	Torsiyon momenti
G	N/mm^2	Kayma modülü (MPa)
K	mm^4	Torsiyon sabitesi

Plakalar (b>>h) için torsiyon sabitesi "K" şu şekilde hesaplanır:

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot h}{K} \quad ; \quad \varphi' = \frac{T}{G \cdot K} \quad ; \quad K = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

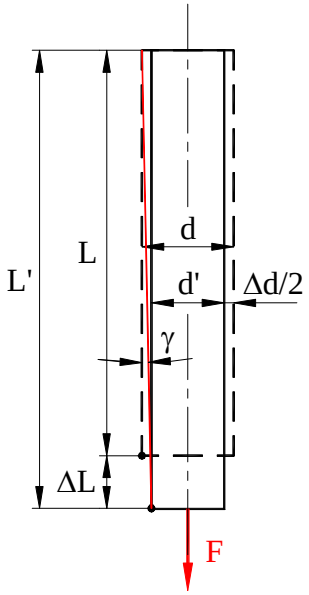
İnce plakalardan oluşan (kalınlık h ve genişlik b) profiller için yaklaşık olarak F 95 kullanılır.

$$\boxed{K = \Sigma b \cdot h^3 / 3} \qquad \text{F 95}$$

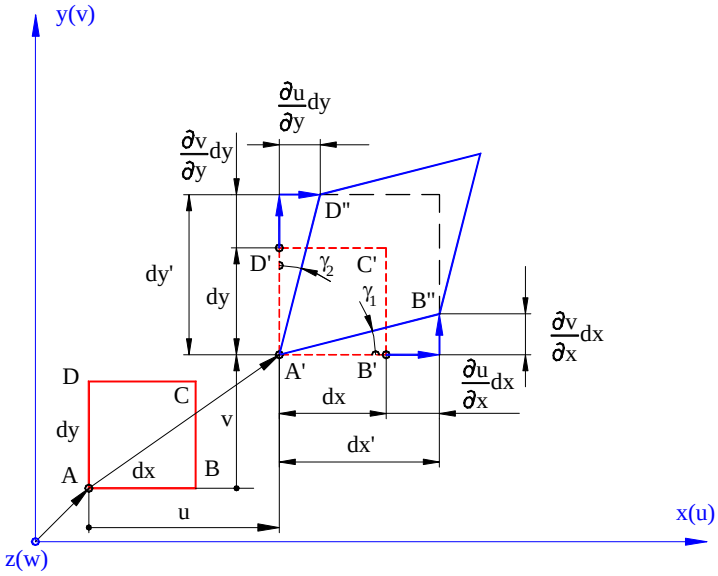
K	mm^4	Torsiyon sabitesi
b	mm	Genişlik
h	mm	Yükseklik

3. Deformasyonlar

3.1. İki eksenli deformasyonlar



Şekil 53, Basit esneme



Şekil 54, Düzlemde deformasyon durumu

Konuyu daha iyi anlamak için Şekil 53 ile görülen tek eksenli basit esnemeyi Şekil 54 ile düzlemde iki eksenli deformasyon durumları ile beraber ele alalım. Burada kaymalar çok küçük kabul edilir ve burulmalar dikkate alınmassa esneme ve kayma komponentleri şu şekilde gösterilir:

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx}{dx}$$

x-ekseninde esneme "ε_x" F 96 olarak bulunur.

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}} \qquad \text{F 96}$$

ε_x	%	x-ekseni yönünde esneme
∂u	mm	x-ekseni yönünde uzama
dx	mm	x-ekseni yönünde çıkış boyu

Aynı yöntemle diğer eksenlerdeki esnemelerde hesaplanır.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Kayma açısı:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx}{dx'}$$

Burada pratikte kabul edilecek küçük bir yanlışla dx=dx' kabul edersek kayma açısı γ_1 şu şekli alır.

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Aynı yöntemle γ_2 yi hesaplarsak $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ bulunur.

Böylece kayma açısı "γ_{xy}" formülü F 97 ile görülen hali alır.

$$\boxed{\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}} \qquad \text{F 97}$$

γ_{xy} , γ_{xy}	rad	x-ekseni ile x e paralel kenarın açısı
∂v , ∂u	mm	y veya x-ekseni yönündeki uzamalar
∂x , ∂y	mm	x veya y-ekseni yönünde çıkış boyu

Buna analog olarak "γ_{xz}" ve "γ_{xz}" kayma açıları formülleri bulunur:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Büyük kaymalar ve daha küçük deformasyonlarda kinematik relasyonlar F 98 verileriyle hesaplanır.

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}} \qquad \text{F 98}$$

Deformasyon komponentleri "u" ve "v" biliniyorsa, esnemeler "ε" ve "γ" F 96 ve F 97 ile hesaplanır. Bunun aksine deformasyonlar "ε" ve "γ" biliniyorsa, "u" ve "v" F 96 ve F 97 formüllerinin entegrasyonu ile, veya "ε_x, ε_y, γ" den üretilen F 99 ile hesaplanırlar.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}} \qquad \text{F 99}$$

$\partial \varepsilon_x / \partial y$	Esneme ε_x fonktionunun "y" ye göre kısmi türevini alma
$\partial \varepsilon_y / \partial x$	Esneme ε_y fonktionunun "x" e göre kısmi türevini alma
$\partial \gamma_{xy} / \partial x \partial y$	Kayma γ_{xy} fonktionunun "x" ve "y" ye göre kısmi türevini alma

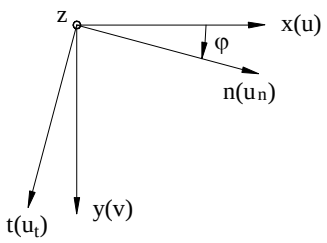
3.2. Koordinatların transformasyonu

Şekil 55 ile görülen koordinatlar sisteminde şu eşitlikler yazılır:

$$\begin{Bmatrix} n = x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi \\ t = -x\cdot\sin\varphi + y\cdot\cos\varphi \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x = n\cdot\cos\varphi - t\cdot\sin\varphi \\ y = n\cdot\sin\varphi + t\cdot\cos\varphi \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u_n = u\cdot\cos\varphi - v\cdot\sin\varphi \\ u_t = -u\cdot\sin\varphi + v\cdot\cos\varphi \end{Bmatrix}$$

Buradan şu değerleri bulabiliriz:

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial n} = \cos\varphi \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = -\sin\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \sin\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \cos\varphi} \qquad \text{F 100}$$



Şekil 55, Koordinatlar

veya şu şekildede yazabiliriz:

$$\begin{Bmatrix} n \\ t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\varphi \\ -\sin\varphi\cdot\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cdot -\sin\varphi \\ \sin\varphi\cdot\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\varphi \\ -\sin\varphi\cdot\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial n} = \cos\varphi \;, & \frac{\partial x}{\partial t} = -\sin\varphi \\ \frac{\partial y}{\partial n} = \sin\varphi \;, & \frac{\partial y}{\partial t} = \cos\varphi \end{Bmatrix}$$

Burada ***"zincir kuralı"***nı uygularsak F 101 formülünü buluruz (zincir kuralı, bkz. Wikipedia)

$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n}\cdot\sin\varphi} \qquad \text{F 101}$$

Buradanda F 96, F 97 ve F 100 formüllerinin yardımıyla F 101 formülünü F 102 şeklinde yazabiliriz.

$$\boxed{\varepsilon_n = \quad \varepsilon_x\cdot\cos^2\varphi \quad + \gamma_{xy}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi \quad + \varepsilon_y\cdot\sin^2\varphi} \qquad \text{F 102}$$

Analog (benzer) olarak $\varepsilon_t = \partial u_t / \partial t$ ve $\gamma_{nt} = \partial u_n / \partial t + \partial u_t / \partial_n$ ise şu değerler yazılır:

$$\boxed{\varepsilon_t = \quad = \varepsilon_x\cdot\sin^2\varphi \quad - \gamma_{xy}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi \quad + \varepsilon_y\cdot\cos^2\varphi} \qquad \text{F 103}$$

$$\gamma_{nt} = \quad = \varepsilon_x\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi \quad + \gamma_{xy}\cdot\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \quad + \varepsilon_y\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\gamma_{nt} = \quad = \varepsilon_x\cdot\sin(2\varphi) \quad + \gamma_{xy}\cdot\cos(2\varphi) \quad + \varepsilon_y\cdot\sin(2\varphi)$$

$$\boxed{\gamma_{nt} = (\varepsilon_x + \varepsilon_x)\cdot\sin(2\varphi) + \gamma_{xy}\cdot\cos(2\varphi)} \qquad \text{F 104}$$

F 96 den F 104 e kadarki formüllerde verilen semboller:

ε_i	mm	İndisine göre esneme
γ_{ij}	mm	İndisine göre kayma
φ	°	Eksenler arasındaki açı
x, y, z, n, t	1	Ana eksenler
u_i	mm	İndisine göre x veya n ekseninde esneme
v_i	mm	İndisine göre y veya t ekseninde esneme

F 37, F 38, F 39 formülleriyle burada F 96 den F 104 e kadarki formüllerde verilen ε_i, γ_{ij} değerlerini karşılaştırırsak tamamen bir benzerlik (analogi) olduğunu görürüz. Şöyleki: Normal gerilmeler σ_x

ve σ_y ile esnemeler ε_x ve ε_y, ve kayma gerilmesi τ_{xy} ile yarım kayma $\gamma_{xy/2}$ nin değerleri benzerdirler. Bu büyüklükler simetrik tensörün bileşenleridir.
Bunu matris olarak gösterirsek, gerilme tensörüne analog olarak deformasyon tensörünü buluruz:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{F 105}$$

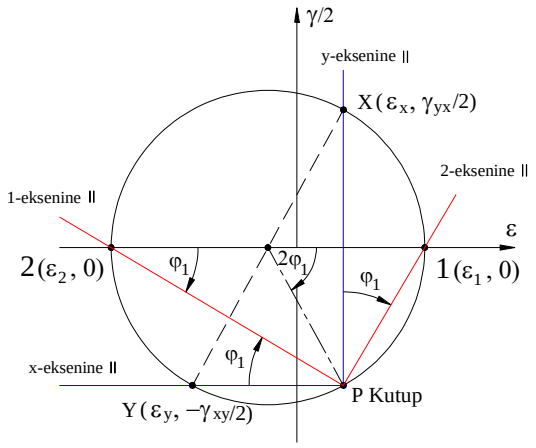
Ana yönler ve ana değerler F 35 ve F 36 e analog olarak şu şekilde yazılır:

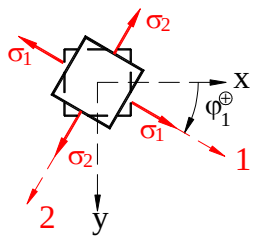
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}} \qquad \text{F 106}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad \text{F 107}$$

φ_1	°	x-ekseni ile n ekseninin oluşturduğu açı
γ_{xy}	mm	Kayma
ε_x	mm	x-ekseni yönündeki esneme
ε_y	mm	y-ekseni yönündeki esneme

Bu gördüklerimizi ordinatı yarım kayma $\gamma/2$ ve apsisi esneme ε olan Mohr deformasyon dairesinde gösterirsek, genel olarak Şekil 56 bulunur.





Burada: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$
φ^+ saat yönünde

Şekil 56, Mohr'un deformasyon dairesi

Burada değerleri şu şekilde değişmez değerler olarak yazabiliriz:

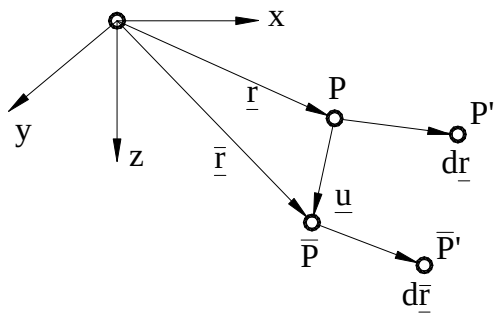
$$\varepsilon_n + \varepsilon_t = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \text{F 108}$$

$$\frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \varepsilon_n \cdot \varepsilon_t = \frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y = -\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \qquad \text{F 109}$$

γ_{xy}	mm	Kayma
ε_i	mm	indisinin ekseni yönündeki esneme

3.3. Üç eksenli deformasyonlar

Zaman t = 0 iken P' noktası P noktasının, t = t iken $\bar{P}'$ noktasıda $\bar{P}$ noktasının deformasyonu olsun.



Şekil 57, Üç eksenli deformasyon

Bu durumda zaman değişken kabul edilirse kayma:

$$\underline{u}(\underline{r},t)=\underline{\bar{r}}(\underline{r},t)-\underline{r}$$

$$\underline{u}=\underline{\bar{r}}-\underline{r}$$

olur.

Zaman t sabit kabul edilirse kayma sahası $\underline{u}(\underline{r})$:

$$\boxed{\underline{\bar{r}}(\underline{r})=\underline{r}+\underline{u}(\underline{r})} \qquad \text{F 110}$$

$\underline{u}$ nun devamlı ve diferansiyeli alınabiliniyorsa:

$$\boxed{d\underline{\bar{r}}=\frac{\partial\underline{\bar{r}}}{\partial x}dx+\frac{\partial\underline{\bar{r}}}{\partial y}dy+\frac{\partial\underline{\bar{r}}}{\partial z}dz} \qquad \text{F 111}$$

Buradanda şu eşitliği analog olarak yazabiliriz:

$$\boxed{d\bar{x}=\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}dx+\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}dy+\frac{\partial\bar{x}}{\partial z}dz,\ldots} \qquad \text{F 112}$$

F 110 e analog olarak $\bar{x}=x+u_x,\ldots$ kabul edersek, F 112 i F 113 da görüldüğü gibi yazarız:

$$\boxed{d\bar{x}=\left(1+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\cdot dx+\frac{\partial u_x}{\partial y}dy+\frac{\partial u_x}{\partial z}dz} \qquad \text{F 113}$$

Burada görülen yeni değerlerin hepsi $\partial u_x/\partial x,\ \ldots,\partial u_z/\partial z$ bire göre küçük kabul edilirler. Bunlar güya kayma eğimidirler. Kayma eğimini şu şekildede ifade edebiliriz:

$$\boxed{u_{k,L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z}\\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z}\\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{bmatrix}=u_{(k,L)}+u_{[k,L]}} \qquad \text{F 114}$$

İndisdeki virgül, virgülden sonra gelen indisin gösterdiği değişkene göre kısmi differensiyeli gösterir:

$u_{k,L}$	m	x_L ye göre kısmi (parsiyel) differansiyel

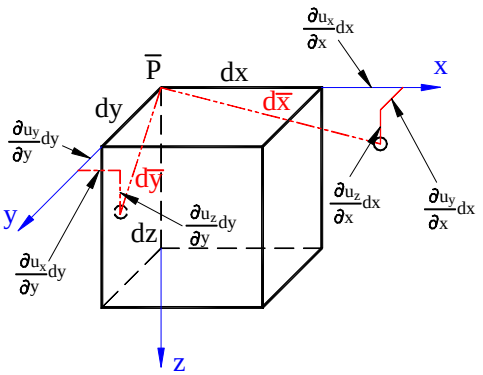
Bu eşitliği x_L ye göre simetrik ve x_L ye göre asimetrik olarakta ifade edebiliriz.

$u_{(k,L)}$	m	x_L ye göre simetrik
$u_{[k,L]}$	m	x_L ye göre simetrik olmayan

Esneme ve kaymalar başta kabul edilen dik açıyı küçültmelerine rağmen, değerler infinitezimal dikdörtgen prizmadan okunabilir.

Şekil 58 ile görülen cisimde $d\bar{x}$ değerinin F 113 ile ilk yaklaşım değerini yazalım:

$$d\bar{x}=\left(1+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\cdot dx$$



Şekil 58, Hacimde deformasyon

Esneme ex şu şekli alır:

$$\varepsilon_x = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \ldots.$$

Aynı zamanda kaymanın değeride yaklaşık olarak:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \ldots$$

olur.

F 114 ile verilen esnemeler ve yarım kaymalar deformasyon tensörünü $u_{(k,L)}$ simetrik ve asimetrik iki kısım olarak yazabiliriz:

$$u_{k,L} = u_{(k,L)} + u_{[k,L]}$$

Burada deformasyon tensörünün simetrik kısmı $u_{(k,L)}$ yi F 115 ile görüldüğü gibi yazarız.

$$\boxed{u_{(k,L)} = \varepsilon_{kL} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}} \qquad \text{F 115}$$

Ve böylece

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \cdots \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \cdots} \qquad \text{F 116}$$

Diğer taraftan deformasyon tensörünün asimetrik kısmı $u_{[k,L]}$ yi F 117 ile görüldüğü gibi yazarız.

$$\boxed{u_{[k,L]} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \varepsilon_z \end{pmatrix}} \qquad \text{F 117}$$

F 117 $u_{[k,L]}$ göre dual vektörü şu şekilde yazabiliriz.

$$\boxed{\underline{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{rot}\underline{u} = \frac{1}{2} \cdot \nabla x \underline{u}} \qquad \text{F 118}$$

$\underline{\omega}$	Açısal hız
$\underline{u}$	deformasyon tensörü
∇	Hamilton-operatörü

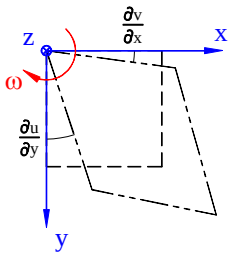
Formül F 118 P nin etrafında rijit cisim rotasyonunu açısal hız $\underline{\omega}$ ile gösterir.
Düzlemde deformasyon durumunda:

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

z-ekseni etrafındaki rotasyonda F 119 ile görüldüğü gibi yazılır:

$$\omega_z = \omega = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \text{F 119}$$



Şekil 59, Düzlemde deformasyon

$$\omega_x = \omega_y = \omega$$

Buraya kadar gördüklerimizi toparlayalım:

Herhangi bir noktanın yakınındaki deformasyonların kayma değeri "u" , rotasyonu "ω" ve esnemesi "ε" ile gösterildiğinde, tensör "ε_{kL}" temel verziyondur ve aşağıda verilen eşitliklerle gösterilir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(1)} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z && = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\
\varepsilon_{(2)} &= \left(\frac{\gamma_{yz}}{2}\right) + \left(\frac{\gamma_{zx}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 - \varepsilon_y\cdot\varepsilon_z - \varepsilon_z\cdot\varepsilon_x - \varepsilon_x\cdot\varepsilon_y && = -\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\
\varepsilon_{(3)} &= \frac{1}{4}\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy} - \varepsilon_x\left(\frac{\gamma_{yz}}{2}\right)^2 - \varepsilon_y\left(\frac{\gamma_{zx}}{2}\right)^2 - \varepsilon_z\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z && = \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3
\end{aligned} \qquad \text{F 120}$$

Deformasyonların ***Mohr dairesi***nde gösterilmesi gerilmelere analog olarak yapılır.
Deformasyon "ε_{kL}" nin; hidrostatik kısmı dilatasyon (şekil değiştirmesiz yalnız hacim esnemesi) ile devitatör kısmının toplamı, burkulmasına (hacimin esnemesiz yalnız şekil değiştirmesine) eşittir.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \qquad \text{F 121}$$

Sekiz yönlü esneme:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{3}\cdot\varepsilon_{(1)} \qquad \text{F 122}$$

Deviatörün temel verziyonu:

$$e_{kL} = \varepsilon_{kL} - \varepsilon_o\cdot\delta_{kL} \qquad \text{F 123}$$

F 19 e analog olarak:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(1)} &= 0 \\
\varepsilon_{(2)} &= \varepsilon_{(2)} + \frac{1}{3}\cdot\varepsilon_{(1)}^2 \\
\varepsilon_{(3)} &= \varepsilon_{(3)} + \frac{1}{3}\cdot e_{(2)}\cdot\varepsilon_{(1)} - \frac{1}{27}\cdot\varepsilon_{(1)}^3
\end{aligned} \qquad \text{F 124}$$

Sekiz yönlü kayma:

$$\frac{\gamma_o}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot e_{(2)}} \qquad \text{F 125}$$

Ana eksenler sistemi:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}\cdot e_1}{\gamma_o} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\gamma_o} \qquad \text{F 126}$$

3.4. Isı etkisinde deformasyonlar

Kesitteki eşit dağılmış ısının yükselmesi "Δt" ısıl genleşme katsayısı "α_T (1/°C)" y e göre defdorme olur (esner).

$$\varepsilon_x = L \cdot \alpha_T \cdot \Delta t \qquad \text{F 127}$$

ε_x	mm	x-yönündeki esneme
L	mm	x-yönünde ısı etkisindeki uzunluk (boy, en veya yükseklik)
α_T	1/°C	Isıl genleşme katsayısı
Δt	°C	Isı farkı

Kesit yüksekliğinde (h) doğrusal ısı dağılımı alt kısımda "T_u" , üst kısımda "T_o" ise kesitte bir bükülme (kavis) oluşur.

$$\chi_y = \alpha_T \cdot \frac{T_u - T_o}{h} \qquad \text{F 128}$$

χ_y	1/mm	y-yönündeki bükülme (kavis)
α_T	1/°C	Isıl genleşme katsayısı
T_u	°C	Alt kısımda ısı
T_o	°C	Üst kısımda ısı
h	mm	Kesit yüksekliği

Genelde bilinen bir temel değere göre (y ve z yönlerinde, 0 °C veya çevre ısısı gibi) dağılımı göreceli T(y, z) ısısı engellenemeyen deformasyonlar doğurur. Şöyle ki:

$$\varepsilon_o = \frac{\int_A \alpha_T \cdot T \cdot dA}{A} \qquad \chi_y = \frac{\int_A \alpha_T \cdot T_z \cdot dA}{J_y} \qquad \chi_z = \frac{-\int_A \alpha_T \cdot T_y \cdot dA}{J_z} \qquad \text{F 129, F 130, F 131}$$

ve kesitin her noktasında bir iç gerilim kalır. İç gerilmeleri genel olarak şu şekilde gösterebiliriz:

$$\int \sigma_{xr} \cdot dA = \int \sigma_{xr} \cdot z \cdot dA = \int \sigma_{xr} \cdot y \cdot dA = 0$$

Buradan da:

$$\sigma_x = E \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_{xT}) = E_o \cdot (\varepsilon_o + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y - \alpha_T \cdot T) \qquad \text{F 132}$$

Burada:

ε_o	1	Esneme F 129 ile
χ_y	1/mm	y-yönündeki bükülme (kavis) F 130 ile
χ_z	1/mm	z-yönündeki bükülme (kavis) F 131 ile

hesaplanır. Eğer ε_o, χ_y ve χ_z herhangi bir şekilde engellenirse, engellenen yerde sıkışmalar oluşur.

Kesitin liflerindeki uzama F 133 ile hesaplanır.

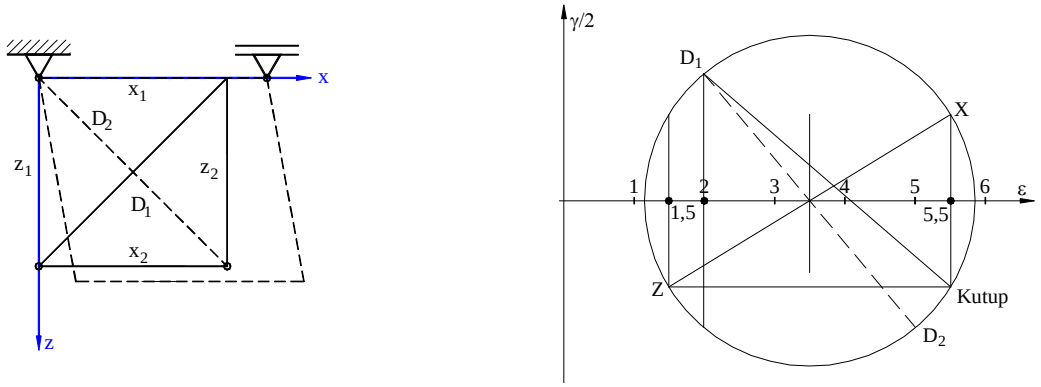
$$\varepsilon_x = \varepsilon_o + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y \qquad \text{F 133}$$

3.5. Deformasyonların özeti

Bir noktanın yakınındaki deformasyonlar, o noktanın u kadar kayması ve kayma değişme derecesi $u_{k,L}$, bir deformasyon tensörü ile bir antimetrik kısım (rijit cisim rotasyonu) olarak taksim edilir. Deformasyon tensörlerinin ana yönleri, değerleri ve temel varyantları gerilme tenssörlerinin hesaplanmaları gibi hesaplanırlar. Analog olarak hidrostatik ve farklı kısımlara ayrılır.

3.6. Uygulama örneği

Şekil 60 ile verilen parçada yan yüzeyi esneme aletleri yardımıyla kenar ve köşegenlerinden ölçülmüştür. Ölçülen ortalama değerler şöyledir:



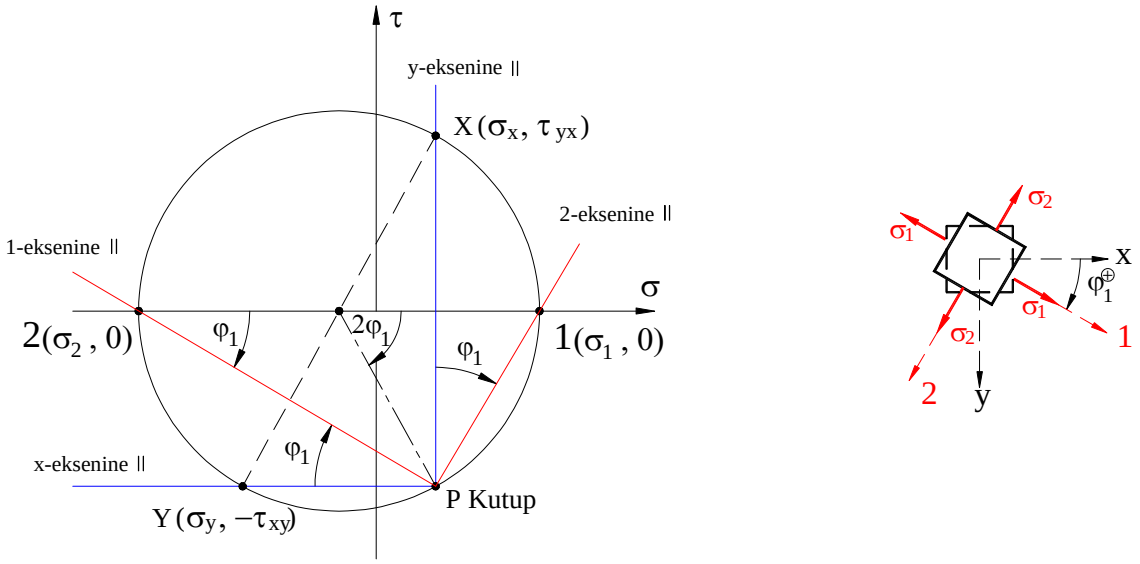
Şekil 60, Düzlemde deformasyon

x_1 ile x_2 arasının ölçülmesinden ε_x = ‰ 5,5
z_1 ile z_2 arasının ölçülmesinden ε_z = ‰ 1,5
D_1 in ölçülmesinden ε_d = ‰ 2

D_2 yönünde ‰ 5 esneme olması gereklidir. Eğer her iki köşegende gereği kadar çok ölçülürse hata yüzdesi mümkün olduğu kadar küçük olur.
Eğer Şekil 60 ile verilen şekli kafes kiriş olarak düşünürsek, gereği kadar çok ölçmekle çubuk rijitliği ve hataların karesinin en küçük toplamı, en küçük şekil değiştirme enerjisini verir.

3.7. Mohr dairesi ve benzerleri, özet

3.7.1. Gerilmeler için Mohr dairesi



Şekil 61, Gerilmeler için Mohr dairesi ve genel kurallar

Burada: $\sigma_1 > \sigma_2$
φ^+ saat yönünde

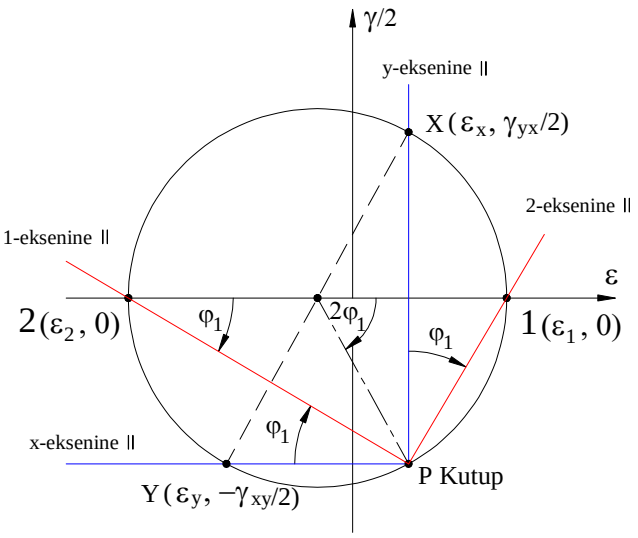
Asal gerilmeler:
bkz: F 30

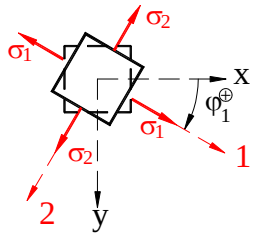
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Asal normal gerilmelerin yönleri:
bkz: F 36

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

3.7.2. Esnemeler için Mohr dairesi





Burada: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$
φ^+ saat yönünde

Şekil 62, Esnemeler için Mohr dairesi ve genel kurallar

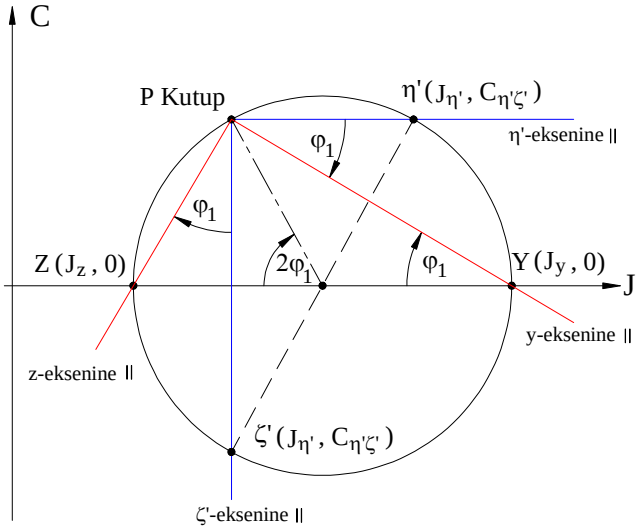
Asal esnemeler:

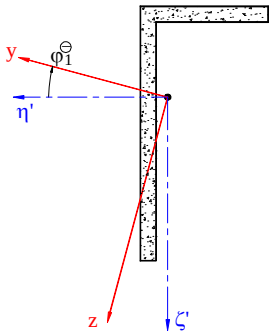
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Asal esnemelerin yönü:

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{\gamma}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

3.7.3. Ataletler momentleri için Mohr dairesi





Burada: $J_y > J_z$
φ^+ ters saat yönünde

Şekil 63, Ataletler için Mohr dairesi ve genel kurallar

Asal atalet momentleri:

$$J_{y,z} = \frac{J_{\eta'} + J_{\zeta'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{\eta'} - J_{\zeta'}}{2}\right)^2 + C_{\eta'\zeta'}^2}$$ F 134

Asal atalet momentlerinin yönü:

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'} - J_{\zeta'}}$$ F 135

4. Kesit çekirdeği

Kesit çekirdeğinin tanımlaması:
Bileşik eksenel kuvvet "N_x" (kesite dik normal kuvvet, çekme veya basma) parçayı kesit çekirdeği alanının içinde etkiliyorsa, kesitin tamamındaki bütün normal gerilmelerin "σ_x" ön işareti "N_x" in ön işaretinin aynı olur.

Kesit çekirdeği kesitin zorlanmasından değil, kesitin geometrisinden oluşur.

Bu tanımlamaya göre, eksenel kuvvet "N_x" in etki noktası A (y_A,z_A) kesit çekirdeği alanının içinde ise nötr ekseni daima kesitin dışındadır. Etki noktası A (y_A,z_A) kesit çekirdeği alanının sınırında ise nötr ekseni kesitin kenarlarındadır ve "$\sigma_x = 0$ " dır.

4.1. Navier' e göre genel gerilme formülü

Ana koordinat eksenlerine için genel gerilme formülü

Genel gerilme formülü F 136 ile ile görüldüğü gibidir:

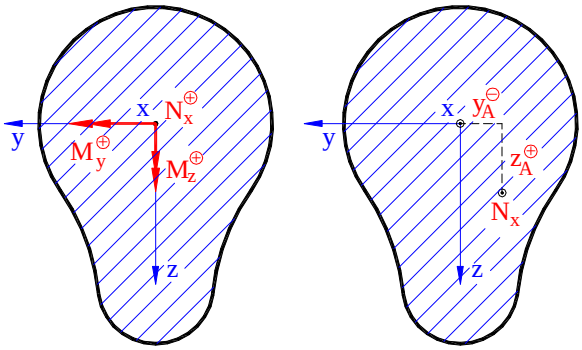
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{J_y}\cdot z - \frac{M_z}{J_z}\cdot y \qquad \text{F 136}$$

Burada M_y ve M_z değerlerini N_x ile yazarsak formülümüz F 137 ile görülen hali alır:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{N_x \cdot z_A}{J_y}\cdot z + \frac{N_x \cdot y_A}{J_z}\cdot y \qquad \text{F 137}$$

ve formül F 137 kısaltılırsa F 138 ile görülen hali alır:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}\cdot\left(1 + \frac{z_A}{i_y^2}\cdot z + \frac{y_A}{i_z^2}\cdot y\right) \qquad \text{F 138}$$



$M_y = N_x \cdot z_A$ $\qquad$ $M_z = -N_x \cdot y_A$

Şekil 64, Ana eksenlere göre momentler

Burada:

σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
N_x	N	x-eksenindeki normal kuvvet
A	mm^2	Tüm kesit alanı
M_y	Nmm	y-eksenine göre tüm kesittekn moment
J_y	mm^4	y-eksenine göre kesitin atalet momenti
z	mm	Etki noktasının z-eksenine göre koordinatı
M_z	Nmm	z-eksenine göre tüm kesittekn moment
J_z	mm^4	z-eksenine göre kesitin atalet momenti
y	mm	Etki noktasının y-eksenine göre koordinatı
z_A	mm	Statik eşdeğer normal kuvvetin etki noktasının z değeri
y_A	mm	Statik eşdeğer normal kuvvetin etki noktasının y değeri
i_y	mm	y-eksenine göre kesitin atalet radyusu
i_z	mm	z-eksenine göre kesitin atalet radyusu

Statik eşdeğer normal kuvvetin etki koordinatları: $y_A = -\frac{M_z}{N}$; $z_A = \frac{M_y}{N}$

Ana atalet radyusları: $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$; $i_y^2 = \frac{J_y}{A}$; $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$; $i_z^2 = \frac{J_z}{A}$

Ana koordinat eksenlerine için nötr ekseni

Burada $\sigma_x = 0$ ise, formül nötr ekseni formülüdür, F 139 :

$$1 + \frac{z_A}{i_y^2} \cdot z + \frac{y_A}{i_z^2} \cdot y = 0 \qquad \text{F 139}$$

y_A, z_A	mm	Çekirdek noktasının koordinatları
y, z	mm	Nötr ekseni noktasının koordinatları
i_i	mm	indisine göre kesitin atalet radyusu

Nötr ekseni için özel haller:

	y-eksenine paralel nötr ekseni		z-eksenine paralel nötr ekseni	
y-ekseni ile kesişme noktası:	P ($y_P = \pm\infty$, 0)	$y_A = -\frac{i_z^2}{y_P} = 0$	P (y_P , 0)	$y_A = -\frac{i_z^2}{y_P}$
z-ekseni ile kesişme noktası:	Q (0 , z_Q)	$z_A = -\frac{i_y^2}{z_Q}$	Q (0 , $z_Q = \pm\infty$)	$z_A = -\frac{i_y^2}{z_Q} = 0$

Ortogonal η' ve ζ' eksenler için genel gerilme formülü

Navier' e göre genel gerilme formülü F 140 ile görüldüğü gibidir:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + M_{\eta'} \cdot \frac{J_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} - M_{\zeta'} \cdot \frac{J_{\eta'} \cdot \eta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \zeta'}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} \qquad \text{F 140}$$

Navier' e göre genel nötr ekseni formülü:

$$\frac{1}{A} + \eta'_A \cdot \frac{J_{\eta'} \cdot \eta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \zeta'}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} - \zeta'_A \cdot \frac{J_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} = 0 \qquad \text{F 141}$$

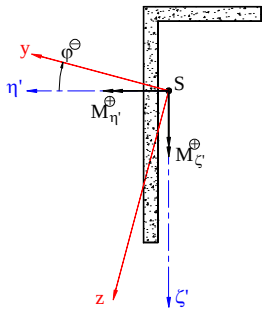
σ_x	MPa	x-eksenindeki normal gerilme
N_x	N	x-eksenindeki normal kuvvet
A	mm^2	Tüm kesit alanı
$M_{\eta'}$	Nmm	η'-eksenine göre tüm kesitin momenti
$J_{\zeta'}$	mm^4	ζ'-eksenine göre kesitin atalet momenti
ζ'	mm	Kesit çekirdeğinin sınır (kenar) noktasının koordinatı
$C_{\eta'\zeta'}$	mm^4	η ve ζ eksenlerine paralel ve O noktasında kesişen η' ve ζ' eksenlerine göre deviasyon momenti
η'	mm	Kesit çekirdeğinin sınır (kenar) noktasının koordinatı
$J_{\eta'}$	mm^4	η'-eksenine göre kesitin atalet momenti
$M_{\zeta'}$	Nmm	ζ'-eksenine göre tüm kesitin momenti
ζ'_A	mm	Nötr ekseni noktasının koordinatı,F 143
η'_A	mm	Nötr ekseni noktasının koordinatı,F 142

Nötr ekseni noktasının koordinatı:

$$\eta'_A = -\frac{M_{\zeta'}}{N} \qquad \text{F 142}$$

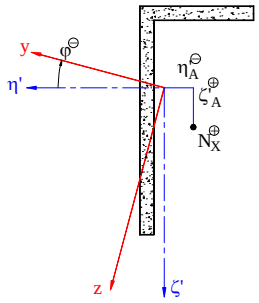
Nötr ekseni noktasının koordinatı:

$$\zeta'_A = -\frac{M_{\eta'}}{N} \qquad \text{F 143}$$



$$M_{\eta'} = N_x \cdot \zeta'_A$$

$$M_{\zeta'} = N_x \cdot \eta'_A$$

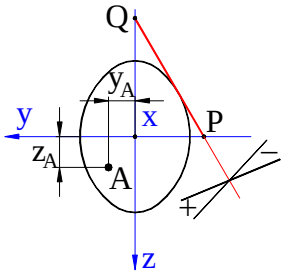


Şekil 65, Ortogonal η' ve ζ' eksenlere göre momentler

4.2. Kesit çekirdeğinin konstrüksiyonu

4.2.1. Genelde kesit çekirdeğinin konstrüksiyonu

Nötr ekseninin (QP) yuvarlanmasıyla oluşan kesit Şekil 66 ile görülmektedir. F 58 da $\sigma_x = 0$ kabul edilirse ***"nötr ekseni"*** diye adlandıracağımız doğru denklemi ***"n-n"*** bulunur. Bu doğruyu kesitin en küçük konveks şeklinde yuvarlarsak sxP = 0 ve sxQ = 0 denklemlerinden :



Şekil 66, Herhangi bir kesit

$$y_A = -\frac{i_z^2}{y_P} \quad ; \quad z_A = -\frac{i_y^2}{z_Q}$$

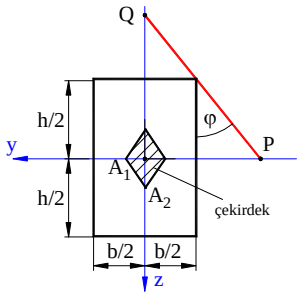
bulunur.

"A" noktası normal kuvvetin etki ettiği nokta olarak kabul edilir. "A" noktalarının oluşturduğu alana ***"kesit çekirdeği"*** adı verilir.

Eğer normal kuvvet "N" çekirdeğin içinden etkiliyse, σ_x kesitin kesitin her yerinde normal kuvvetin "N" ön işaretini alır (basma veya çekme).

Çekirdeğin uygulanması daha çok çekmeye zayıf olan beton, duvar ve temel gibi yerlerde kullanılır. Pratikte gerilme ve deformasyonları bulmak için bir sürü tablo ve programlar yapılmıştır. Lineer elastik olan bir cisimde F 48 ile ağırlık merkezi, F 53 ile ana yön φ_1 bulunur. F 46 ve F 47 ile genel gerilmeler ve deformasyonlarla kesitteki herhangi bir noktadaki gerilmelerin bağlantısı bulunur.

4.2.2. Dikdörtgen kesit alanında çekirdek



Şekil 67, Dikdörtgen kesit

$$A = b \cdot h$$

$$I_y = b \cdot h^3/12 \quad ; \quad I_z = b^3 \cdot h/12$$

$$i_y^2 = h^2/12 \quad ; \quad i_z^2 = b^2/12$$

$$y_P = -(b + h \cdot \tan\varphi)/2 \qquad y_A = \frac{b^2}{6 \cdot (b + h \cdot \tan\varphi)}$$

$$z_Q = -(h + b \cdot \cot\varphi)/2 \qquad z_A = \frac{h^2}{6 \cdot (h + b \cdot \cot\varphi)}$$

A_1: $\tan\varphi = 0$ $\quad \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad y_{A1} = b/6 \quad ; \quad z_{A1} = 0$

A_2: $\tan\varphi = \infty$ $\quad \varphi = \pi/2 \quad \rightarrow \quad y_{A2} = 0 \quad ; \quad z_{A2} = h/6$

$0 < \varphi < \pi/2 \qquad (2y_P + b) \cdot (2z_Q + h) = b \cdot h$

$$4 \cdot \frac{i_y^2 \cdot i_z^2}{y_A \cdot z_A} = 2 \cdot h \cdot \frac{i_z^2}{y_A} + 2 \cdot b \cdot \frac{i_y^2}{z_A}$$

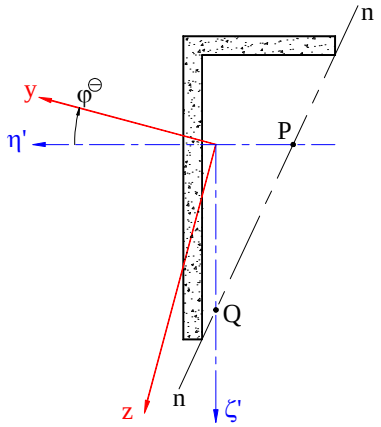
$$\boxed{4 \cdot i_y^2 \cdot i_z^2 = 2 \cdot h \cdot i_z^2 \cdot z_A + 2 \cdot b \cdot i_y^2 \cdot y_A} \qquad \ldots \text{doğru}$$

Kesit alanının köşeleri çekirdeği sınırlarlar ve çekirdek köşelerini kesit alanının kenarları verir.

4.2.3. Kesit çekirdeğinin detaylı konstrüksiyonu

Kesit çekirdeği nötr ekseninin (QP) yuvarlanmasıyla oluşur.

Şu tanımlamaları hiç unutmamamız gerekir. η'_A , ζ'_A kesit çekirdeğindeki noktalar,
η , ζ nötr eksenindeki noktalardır.



Şekil 68, Nötr ekseni kesişme noktaları

Genelde kesit çekirdeğinin bilinmiyen noktası A (η'_A , ζ'_A) yı bulmak için nötr eksenleri n-n ile ana eksenler η' ve ζ' nın kesit noktaları P (η'_P , 0) ve Q (0 , ζ'_Q) kullanılır. Kontrüksiyonu detaylı yapmak istersek nötr ekseni formülünü (F 141) ele alıp nötr ekseni kesişme noktalarını P (η'_P , 0) ve Q (0 , ζ'_Q) bulmamız gerekir.

Nötr ekseni formülü F 141 ile P (η'_P , ζ'_P) değerlerini yerleştirip hesabımızı yapalım. η'_P nin değeri herhangi bir değerdir, ζ'_P nin değeri sıfırdır (Şekil 68). Diğer taraftan Q (η'_Q , ζ'_Q) da η'_Q nun değeri sıfırdır, ζ'_Q nun değeri herhangi bir değerdir.

Bu değerleri nötr ekseni formülüne yerleştirip η'_A , ζ'_A kesit çekirdeğindeki noktaları bulalım.

P (η'_P , ζ'_P) için $$\frac{1}{A}+\frac{\eta'_A\cdot J_{\eta'}-\zeta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}\cdot\eta'_P+\frac{\zeta'_A\cdot J_{\zeta'}-\eta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}\cdot\zeta'_P=0$$

$\zeta'_P=0$ olduğundan $$\frac{1}{A}+\frac{\eta'_A\cdot J_{\eta'}-\zeta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}\cdot\eta'_P=0$$ buradanda:

$$\frac{\eta'_A\cdot J_{\eta'}-\zeta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}=-\frac{1}{\eta'_P\cdot A}$$

Formül 1 $$\boxed{\eta'_A\cdot J_{\eta'}-\zeta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}=-\frac{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P\cdot A}}$$ F 144

Q (η'_Q , ζ'_Q) için $$\frac{1}{A}+\frac{\eta'_A\cdot J_{\eta'}-\zeta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}\cdot\eta'_Q+\frac{\zeta'_A\cdot J_{\zeta'}-\eta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}\cdot\zeta'_Q=0$$

$\eta'_Q=0$ olduğundan $$\frac{1}{A}+\frac{\zeta'_A\cdot J_{\zeta'}-\eta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}\cdot\zeta'_Q=0$$ buradanda:

$$\frac{\zeta'_A\cdot J_{\zeta'}-\eta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}=-\frac{1}{\zeta'_Q\cdot A}$$

Formül 2 $$\boxed{\zeta'_A\cdot J_{\zeta'}-\eta'_A\cdot C_{\eta'\zeta'}=-\frac{J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q\cdot A}}$$ F 145

Böylece 2 bilinmiyen ve 2 denklemimiz olur. Buradan şu eşitlik yazılır:

$$\boxed{\begin{bmatrix}-C_{\eta'\zeta'} & J_{\zeta'}\\ J_{\eta'} & -C_{\eta'\zeta'}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\eta'_A\\ \zeta'_A\end{pmatrix}=\frac{1}{A}\cdot\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\zeta'_Q}\\ -\dfrac{1}{\eta'_P}\end{pmatrix}\cdot\left(J_{\eta'}\cdot J_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}\right)}$$ F 146

Eğer nötr ekseni dik açılı η' ve ζ' eksenlere paralel ve kesitin ağırlık merkezinden geçiyorsa, şu özel durumlar ortaya çıkar.

a) n-n nötr ekseni η' eksenine paraleldir. Bu durumda:

Nötr ekseninin η' ekseni ile kesiştiği noktanın koordinatları P ($\eta'_P = \pm\infty$, 0) olarak kabul edilirse:

P ($\eta'_P = \pm\infty$, 0) için F 144 ile → $\eta'_A \cdot J_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = 0$ F 147

Nötr ekseninin ζ' ekseni ile kesiştiği noktanın koordinatları Q (0 , ζ'_{PQ}) olarak kabul edilirse:

Q (0 , ζ'_Q) için F 145 aynen alınır → $\zeta'_A \cdot J_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\dfrac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A}$ F 145

Buradada iki denklem iki bilinmiyen olduğu için bilinmeyenler hesaplanır:

F 147 ile ζ'_A hesaplanırsa $\zeta'_A = \dfrac{\eta'_A \cdot J_{\eta'}}{C_{\eta'\zeta'}}$ elde edilir. Bu değeri F 145 formülüne yerleştirirsek:

$$\frac{\eta'_A \cdot J_{\eta'}}{C_{\eta'\zeta'}} \cdot J_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A}$$

$$\eta'_A \cdot \left(\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'}}{C_{\eta'\zeta'}} - C_{\eta'\zeta'} \right) = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A}$$

$$\eta'_A = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A} \cdot \left(\frac{C_{\eta'\zeta'}}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}} \right)$$

$$\boxed{\eta'_A = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A}} \qquad \text{F 148}$$

Hesaplanan F 148 değerini F 147 formülüne yerleştirirsek ζ'_A nın değerini buluruz (F 149).

$$-\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A} \cdot J_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = 0$$

$$\boxed{\zeta'_A = -\frac{J_{\eta'}}{\zeta'_Q \cdot A}} \qquad \text{F 149}$$

η'_A	mm	A noktasının η' değeri
$C_{\eta'\zeta'}$	mm^4	Deviasyon momenti
ζ'_Q	mm	Q noktasının ζ' değeri
A	mm^2	Tüm kesit alanı
ζ'_A	mm	A noktasının ζ' değeri
$J_{\eta'}$	mm^4	η'-eksenine göre kesitin atalet momenti

b) ***n-n nötr ekseni ζ' eksenine paraleldir.*** Bu durumda:

Nötr ekseninin η' ekseni ile kesiştiği noktanın koordinatları P (η'_P , 0) olarak kabul edilirse:

P (η'_P , 0) için F 144 aynen alınır → $\eta'_A \cdot J_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\dfrac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}$ F 144

Nötr ekseninin ζ' ekseni ile kesiştiği noktanın koordinatları Q (0, $\zeta'_Q = \pm\infty$) olarak kabul edilirse:

Q (0, $\zeta'_Q = \pm\infty$) için F 145 ile → $\zeta'_A \cdot J_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = 0$ F 150

Buradada iki denklem iki bilinmiyen olduğu için bilinmeyenler kolayca hesaplanır:

F 150 ile ζ'_A hesaplanırsa $\zeta'_A = \frac{\eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\zeta'}}$ elde edilir ve bunu F 144formülüne yerleştirirsek:

$$\eta'_A \cdot J_{\eta'} - \frac{\eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'}}{J_{\zeta'}} \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}$$

$$\eta'_A \cdot \left(J_{\eta'} - \frac{C^2_{\eta'\zeta'}}{J_{\zeta'}} \right) = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}$$

$$\eta'_A = -\frac{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A} \cdot \frac{J_{\zeta'}}{J_{\eta'} \cdot J_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}$$

$$\boxed{\eta'_A = -\frac{J_{\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}} \qquad \text{F 151}$$

Hesaplanan F 151 değerini F 150 formülüne yerleştirirsek ζ'_A nın değerini buluruz (F 152).

$$\zeta'_A \cdot J_{\zeta'} + \frac{J_{\zeta'}}{\eta'_P \cdot A} \cdot C_{\eta'\zeta'} = 0$$

$$\boxed{\zeta'_A = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}} \qquad \text{F 152}$$

η'_A	mm	A noktasının η' değeri
$J_{\zeta'}$	mm^4	ζ'-eksenine göre atalet momenti
η'_P	mm	P noktasının η' değeri
A	mm^2	Tüm kesit alanı
ζ'_A	mm	A noktasının ζ' değeri
$C_{\eta'\zeta'}$	mm^4	Deviasyon momenti

Kesit çekirdeğindeki bilgileri tekrar hatırlayalım:

Nötr ekseni kesitin bir noktasına değiyorsa, çekirdeğin sınırı bir doğrudur.
Nötr ekseni kesitin kenarına değiyorsa çekirdeğin sınırı köşedir.

Kesit çekirdeği alıştırma ödevininin detaylı çözümünü 44_04_4 numaralı dosyada göreceğiz.

5. Mohr benzerliği (Mohr analojisi)

Mohr benzerliği diğer deyimi ile ***"Mohr analojisi"*** kompleks problemleri basit problemlere indirgeyerek kolayca çözümü sağlar.

5.1. Prensip ve gidiş yolu

Sehimin $w'' = -\dfrac{M}{E \cdot J}$ ve momentin $M'' = -q$ diferansiyel denklemleri analogdurlar. Buda moment M nin q ile hesaplanmasına benzer şekilde sehim w nin kesit değerleri ile aynı yapı statiği metodlarıyla hesaplanabileceğini gösterir.

$$\boxed{M'' = -q \qquad \leftrightarrow \qquad w'' = -\frac{M}{E \cdot J}}$$

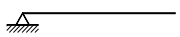
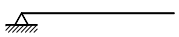
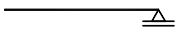
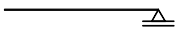
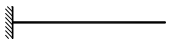
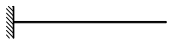
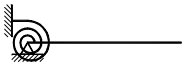
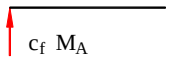
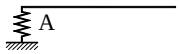
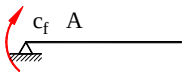
Böylece gidiş yolunu şu şekilde yazabiliriz:

1. Bilinen kirişte kesit büyüklükleri M (ve V) yi bir zorlamaya (örneğin:q ya) göre hesaplarız,
2. Analog kirişte momenti zorlayan yük kabul ederiz,
3. w = M* analojisine göre hesabı yaparız.

Tablo 2, Mohr benzerliği (analojisi) için akış tablosu

Bilinen kirişte işlem akışı	Analog kirişte işlem akışı
$q = -M''$	$q^* = \dfrac{M}{E \cdot J} = -w'' = \chi$
$\downarrow \; -\int$	$\downarrow \; -\int$
$V = M'$	$V^* = w' = \varphi$
$\downarrow \; \int$	$\downarrow \; \int$
M	$M^* = w$
$\downarrow$	$\downarrow$

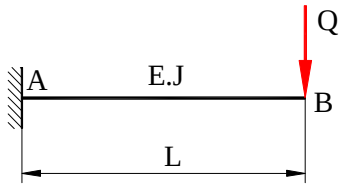
Tablo 3, Bilinen kiriş ile analog kirişi karşılaştırma

Bilinen kiriş			Analog kiriş		
	Hareketsiz yatak	$w = 0$ $w' \neq 0$		Hareketsiz yatak	$M^* = 0$ $V^* \neq 0$
	Hareketli yatak	$w = 0$ $w' \neq 0$		Hareketli yatak	$M^* = 0$ $V^* \neq 0$
	Sabit yatak	$w = 0$ $w' = 0$		Boşta son	$M^* = 0$ $V^* = 0$
	Boşta son	$w \neq 0$ $w' \neq 0$		Sabit yatak	$M^* \neq 0$ $V^* \neq 0$
	Hareketli ara yatak	$w = 0$ $w'_L = w'_R$		Mafsal	$M^* = 0$ $V^*_L = V^*_R$
	Mafsal	$w \neq 0$ $w'_L \neq w'_R$		Hareketli ara yatak	$M^* \neq 0$ $V^*_L \neq V^*_R$
	Elastik sabit bağlantı	$w = 0$ $w' = c_f \cdot M_A$		Tek yüklü boşta son	$M^* = 0$ $V^* = c_f \cdot M_A$
	Elastik yataklama	$w = c_f \cdot M_A$ $w' \neq 0$		Mometle zor-lanan hareket-siz yatak	$M^* = c_f \cdot M_A$ $V^* \neq 0$

Burada indis L = sol, R = sağ ve $c_f = 1/R$ (m/N) olarak kabul edilir.

5.2. Örnekle Mohr benzerliği

5.2.1. Örnek 1, Serbest uçta tek kuvvetle zorlanan portafo (çıkma) kirişte sehim



Şekil 69, Portafo (çıkma) kirişte sehim

Bilinenler:

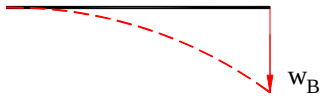
Şekil 69 ile verilen sistemde E.J = sabit ve kuvvet Q ile kiriş boyu L biliniyor.

Aranan:

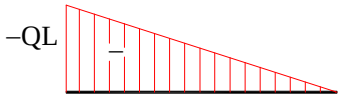
B noktasındaki sehim formülü.

Çözüm:

Şimdiye kadar öğrendiklerimize göre, analojide bilinen kirişteki maksimum moment yerinde maksimum sehim oluşur.Burda momenti analog kirişte zorlayan kuvvet kabul edip, bilinen kirişteki maksimum moment yerinde analog kirişte momenti hesaplarsak, bu bilinen kirişteki sehime eşittir.

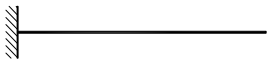
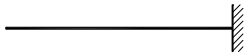


Şekil 69-01, Q nun sehiminin kalitatif çizimi

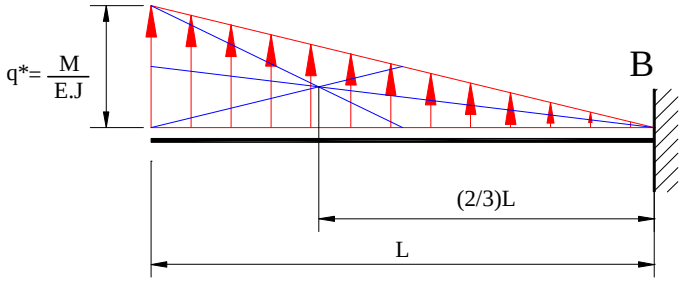


Şekil 69-02, Q nun moment dağılımı

Tablo 3 ile verilen analojiye göre sistemimizi analog kiriş olarak şu şekilde gösteririz.

Bilinen kiriş		Analog kiriş	
			
$w = 0$	$w \neq 0$	$M^* = 0$	$M^* \neq 0$
$w' = 0$	$w' \neq 0$	$V^* = 0$	$V^* \neq 0$

Analog kirişte bilinen kirişteki moment yayılı yük olarak alınır ve sabit yatak olarak kabul edilen B tarafındaki moment = sehim hesaplanır.



Şekil 69-05, Analog kirişte zorlama

Moment üçgeninin alanı analog kirişte zorlama kuvvetidir. $A_ü = F_ü = \frac{1}{2} \cdot q^* \cdot \frac{L}{2} = \frac{q^* \cdot L}{4}$

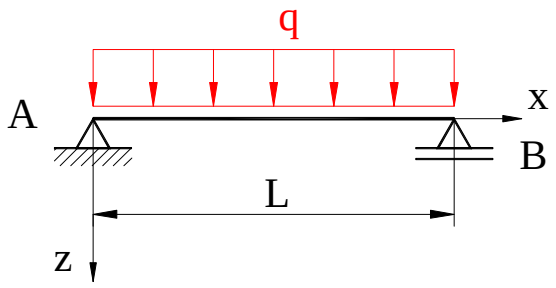
$M = Q \cdot L$ $\quad q^* = \frac{M}{E \cdot J} = \frac{Q \cdot L}{E \cdot J}$ olduğundan $w_B = M^* = F_ü \cdot \frac{2L}{3}$ $\quad F_ü == \frac{Q \cdot L}{E \cdot J} \cdot \frac{L}{4}$

Böylece Şekil 69-01 ile B ucundaki sehim "w_B" şu şekilde bulunur:

$$w_B = \frac{Q \cdot L}{E \cdot J} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{2L}{3}$$

$$w_B = \frac{Q \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

5.2.2. Örnek 2, Sabit yayılı yükle zorlanan klasik kirişte sehim



Şekil 70, Sabit yayılı yüklü klasik kiriş

Bilinenler:

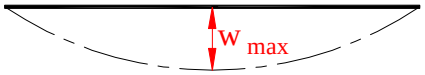
Şekil 70 ile verilmiş olan sabit yayılı yükle zorlanan klasik kirişte q ve L bilinmektedir.

Aranan:

Maksimum sehim formülü.

Çözüm:

Analojide bilinen kirişteki maksimum moment yerinde maksimum sehim oluşur.Burda momenti analog kirişte zorlayan kuvvet kabul edip, bilinen kirişteki maksimum moment yerinde analog kirişte momenti hesaplarsak, bu bilinen kirişteki sehime eşittir.



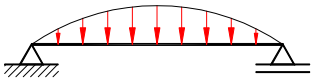
Şekil 70-01, q nun sehiminin kalitatif çizimi

Şekil 70-02, q dan oluşan moment dağılımı

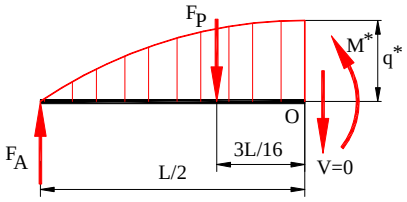
Tablo 3 ile verilen analojiye göre sistemimizi analog kiriş olarak şu şekilde gösteririz.

Bilinen kiriş			Analog kiriş		
$w = 0$	$w_m \neq 0$	$w = 0$	$M^* = 0$	$M^* \neq 0$	$M^* = 0$
$w' \neq 0$	$w'_m = 0$	$w' \neq 0$	$V^* \neq 0$	$V^* = 0$	$V^* \neq 0$

Analog kirişte zorlama



Şekil 70-05, Analog kirişte zorlama



Şekil 70-06, Analog kirişte moment

Yarım parabolün alanı analog kirişte zorlama kuvveti $A_P = F_P = F_A = \frac{2}{3} \cdot q^* \cdot \frac{L}{2}$

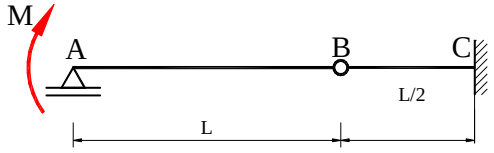
Burada $q^* = \frac{M}{E \cdot J} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot J}$ olduğundan $F_P = F_A = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot \frac{L}{2} = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot J}$

Maksimum moment maksimum sehime eşittir:

$$w_{max} = \left(F_A \cdot \frac{L}{2} - F_P \cdot \frac{3L}{16} \right) = F_A \cdot \frac{5L}{16} = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{5L}{16}$$

$$\boxed{w_{max} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot J}}$$

5.2.3. Örnek 3, Mafsallı sistemde sehim



Şekil 71, Mafsallı sistemde sehim

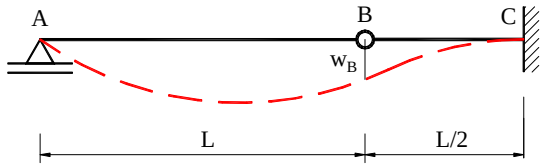
Bilinenler:

Şekil 71 ile verilen sistem.

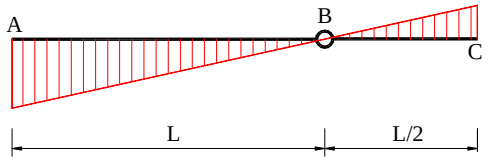
Arananlar:

1. Mafsal B de sehim w_B.

Çözüm:

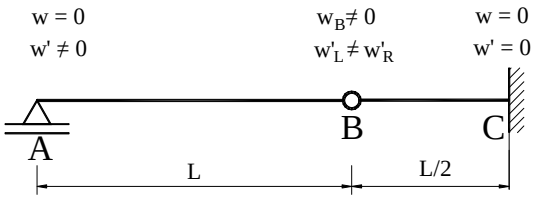


Şekil 71-01, Sistemde sehimin kalitatif çizimi

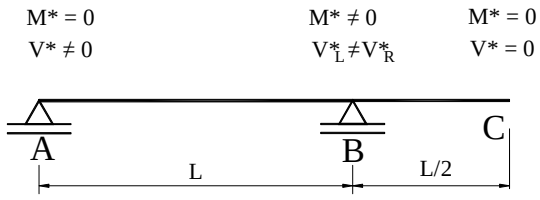


Şekil 71-02, Sistemde moment dağılımı

Tablo 3 ile verilen analojiye göre sistemimizi analog kiriş olarak şu şekilde gösteriri z.

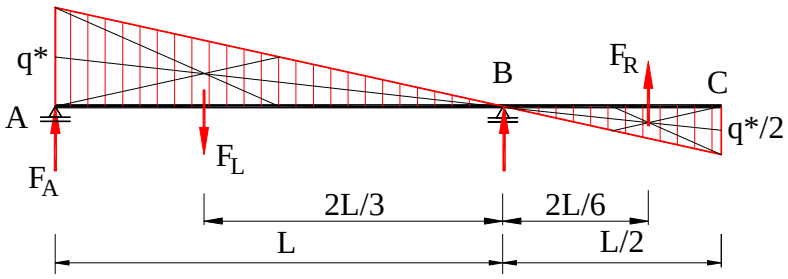


Şekil 71-03, Bilinen sistem



Şekil 71-04, Analog sistem

Analog kirişte zorlama



Şekil 71-05, Analog kirişte zorlama ve moment

$$q^* = \frac{M}{E \cdot J} \qquad A_{ÜL} = F_L = \frac{q^* \cdot L}{2} \qquad \boxed{F_L = \frac{M \cdot L}{2 \cdot E \cdot J}} \qquad A_{ÜR} = F_R = \frac{q^* \cdot L}{8} \qquad F_R = \frac{M \cdot L}{8 \cdot E \cdot J}$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad F_A \cdot L - F_L \cdot \frac{2L}{3} - F_R \cdot \frac{L}{3} \qquad F_A = F_L \cdot \frac{2}{3} + F_R \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot (2F_L + F_R)$$

$$F_A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{M \cdot L}{E \cdot J} + \frac{M \cdot L}{8 \cdot E \cdot J} \right) = \frac{9 \cdot M \cdot L}{24 \cdot E \cdot J} \qquad \boxed{F_A = \frac{3 \cdot M \cdot L}{8 \cdot E \cdot J}}$$

$$w_B = M_B = F_A \cdot L - F_L \cdot \frac{2L}{3}$$

Maksimum moment maksimum sehime eşittir:

$$w_B = \left(\frac{3 \cdot M \cdot L}{8 \cdot E \cdot J} \cdot L - \frac{M \cdot L}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{2L}{3} \right) = \frac{3 \cdot M \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot J} - \frac{M \cdot L^2}{3 \cdot E \cdot J}$$

$$\boxed{w_B = \frac{M \cdot L^2}{24 \cdot E \cdot J}}$$

6. Konu İndeksi

A

Asal atalet momentleri 32, 58
Asal atalet momentlerinin yönü 32, 58
Asal esnemeler 58
Asal esnemelerin yönü 58
Asal gerilme 7
Asal normal gerilmeler 19, 57
Asal normal gerilmelerin yönleri 16, 57
Atalet momentleri 30

B

Bir boyutlu gerilme 5
Bir eksenli gerilme 5, 6
Bisquit formülü 38
Bredt 47
Bredt formülü 47

Ç

Çapraz kuvvet 38

D

Daire fomülü 17
Deviator 13
Düzlem gerilme 7
Düzlem gerilmeleri 5

E

Eğik kesitteki gerilmeler 6
Eğilme çizgisi 33
Elementer kuvvet 11
Esneme 49
Etkin kayma alanı 27, 42

G

Gerilmeler tensörü 11

H

Hacim gerilmeleri 5
Homojen lineer denklem 11

I

İdeal eylemsizlik momentleri 32
İki boyutlu gerilme 8
İki eksenli gerilme 5, 8
İndisle yazılış şekli 11

K

Karakteristik denklem 11
Kavis 27, 28, 29, 34, 37, 56
Kayma açısı 50
Kayma gerilmesi akımı 47
Kiriş teorisi 27
Kirişin diferansiyel denklemi 34
Kutup noktası 6

M

Maksimum kayma gerilmesi 19
Matrisle yazılış şekli 11
Mohr analojisi 65
Mohr benzerliği 65
Mohr dairesi 17, 18
Mohr dairesi kutup noktası P 22
Mohr dairesi merkezi M 21, 25
Mohr dairesi yarıçapı R 22, 25
Mohr dairesinin konstrüksiyonu 21
Mohr dairesinin merkez koordinatları 18
Mohr dairesinin radyus boyu 19
Mohr'un gerilmeler dairesi 17

N

Normal gerilmelerin genel formülü 32
nötr ekseni 60

O

Oktaeder kayma gerilmesi 14
Oktaeder normal gerilme 13
Ön işaret kuralına 20

S

Şekil değiştirme işi 42, 43
Sembolle yazılış şekli 11
St.Venant 47
Statik moment 39
Statik Sınır Koşullar 11

T

Tensör 11
Torsiyon atalet momenti J_P 47
Torsiyon merkezi 46
Torsiyon sabitesi 49

U

Üç eksenli gerilme 5

Y

Yağmur suyu kuralı 39

Z

Zincir kuralı 51