

İlk yayın: 13 Haziran 2014

www.guven-kutay.ch

YAPI STATİĞİ

Prof. Dr. P. Marti

Reaksiyonlar ve Kesit büyüklükleri

44-01-1

Bu dosyayı *44_00_Yapı Statikine Giriş ve Özet* dosyasıyla beraber incelerseniz daha iyi anlarsınız.

Çevirenler: *M. Güven KUTAY, Muhammet ERDÖL*

En son durum: 1 Eylül 2014

Bu dosyalarda yalnız ders notlarının tercümesi verilmiştir. Daha geniş ve detaylı bilgi almanız için *Prof. Dr. P. Marti* nin Statik kitabını öneririm.

Almanca-Deutsch



Peter Marti
Baustatik, Grundlagen-
Stabtragwerke-Flächentragwerke
Ernst & Sohn, Berlin, 2012

İngilizce-English



Peter Marti
Theory of Structures, Fundamentals,
Framed Structures, Plates and Shells
Ernst & Sohn, Berlin, 2012

Prof. Dr. P. Marti



Prof. Dr. sc. Peter Marti
1990 ile 2014 senelerinde
Zürich ETH da İnşaat Statik ve
Konstrüksiyonu Profesörü

DİKKAT:

Bu çalışma iyi niyetle ve bugünün teknik imkanlarına göre yapılmıştır. Bu çalışmadaki bilgilerin yanlış kullanılmasından doğacak her türlü maddi ve manevi zarar için sorumluluk kullanana aittir. Bu çalışmadaki bilgileri kullananlara, kullandıkları yerdeki şartları iyi değerlendirip buradaki verilerin yeterli olup olmadığına karar vermeleri ve gerekirse daha detaylı hesap yapmaları önerilir. Eğer herhangi bir düzeltme, tamamlama veya bir arzunuz olursa, hiç çekinmeden bizimle temasa geçebilirsiniz.

Statik dosyalarında kullandığımız terimlerin Almancadan Türkçe karşılığını, ne Türk Dil Kurumunda nede normal veya elektronik sözlüklerde bulamadık. Hedefimiz Türkçe bilen ve temel bilgisi az dahi olan kütleye basit olarak bilgileri aktarmak olduğu için, kendi mantığımıza göre okuyucunun anlayacağı, basit Türkçe terimler kullandık. Ayrıca 44-00 numaralı dosyada Türkçe-Almanca(-İngilizce-Fransızca) sözlük ile Kaynakları verdik. İsteyen oradan kullanılan Türkçe terimleri bulabilir. Bilginiz ola!..

*Terimlerin Türkçe karşılığı için büyük yardımı olan sayın **Muhammet ERDÖL** e kendim ve dosyadan faydalanacakların adına çok teşekkür ederim. Ayrıca 44-20 numaralı dosyada Türkçe-Almanca sözlük ile Kaynakları verdim.*

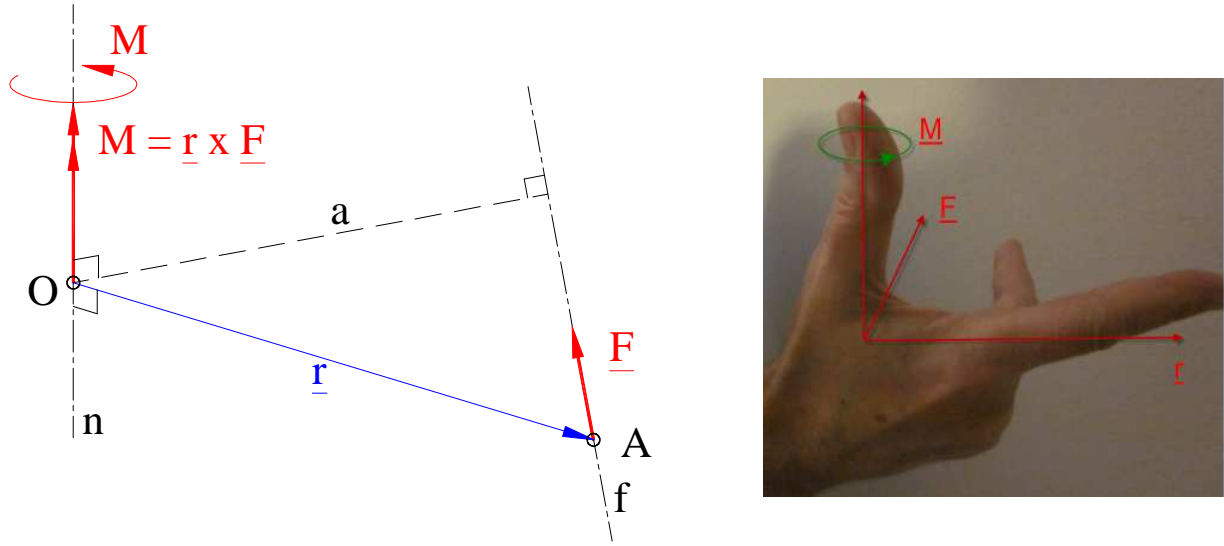
İÇİNDEKİLER

0.	Genel giriş	3
0.1.	Kuvvet, moment ve denge kuralları	3
0.2.	Kesit büyüklükleri ve statik belirlilik	4
0.3.	Denge denklemiyle genel çözüm	5
0.4.	Reaksiyon ve Kesit büyüklükleri	6
0.5.	Statik problemlerinin çözümünde tutulacak yol	7
1.	Deformasyonlar	9
1.1.	Boyuna deformasyon	9
1.2.	Enine deformasyon (sehim), Galile'nin problemi,	14
1.2.1.	Kavis	15
1.2.2.	Sehimin kavis ile hesaplanması	17
1.2.3.	Sehimin pratikte hesaplanması	17
1.2.3.1.	Tek kuvvetle zorlanan basit kiriş	17
1.1.1.1.1.	Sayısal örnek 1	18
1.1.1.1.2.	Sayısal örnek 2	18
1.2.3.2.	Yayıllı yüklerle zorlanan basit kiriş	19
1.1.1.1.3.	Deney ve sehimle gerilim hesabı	21
1.1.1.1.4.	Yayıllı yüklerle zorlanan basit kiriş için örnek	22
1.1.1.1.5.	Yayıllı yüklerle zorlanan basit kirişin (halatın) maksimum boyu	24
1.1.1.1.6.	Deney kirişi	25
1.2.4.	Kavisli çubuk	27
1.2.4.1.	Kavisli çubukta değerler	28
1.2.4.2.	Dik kuvvet etkisinde üç oynaklı kemer	30
2.	Sayısal örnekler	31
2.1.	Denizde petrol platformu	31
2.2.	Atom santralı koruyucu gömleği	31

0. Genel giriş

0.1. Kuvvet, moment ve denge kuralları

Bir kuvvet; etkilediği nokta (A), büyüklüğü (F) ve yönü, etki doğrusu (f) ile tanımlanır. Böylece kuvvet "**Vektör**" \underline{F} olarak bilinir.



Şekil 1, Kuvvetin tanımı ve sağ el kuralı

Kuvvetin etki doğrusu "f" ve herhangi bir nokta "O" belirli bir düzlem oluşturur. Bu düzleme bir cisim üzerinde düşünersek etki kuvveti \underline{F} , "O" noktası etrafında bu cismi "O" noktasında bu düzleme dik olan bir eksen "n" etrafında döndürmeye zorlar. Bu döndürme "F" kuvvetinin büyüklüğü ve "F" kuvvet vektörünün "O" noktasına olan uzaklığı ile orantılıdır.

$$M = F \cdot a$$

Bu bağıntı görüldüğü gibi moment vektörü olarak ifade edilebilir, Şekil 1.

Şekil 1, Kuvvetin tanımı ve sağ el kuralı

$$\underline{M} = \underline{r} \cdot \underline{F}$$

Bu durum "**Sağ el kuralı**" veya "**Sağ civata kuralı**" olarak tanımlanır. Buradan bu durumdaki "**denge kuralı**"nı yazalım. Bir cismin denge halinde olması için, cisme etki gösteren kuvvet ve momentler birbirlerini eşit olarak karşılamalıdır, yani toplamaları sıfır olmalıdır. Bu tanımlamayı matematiksel ifade edersek;

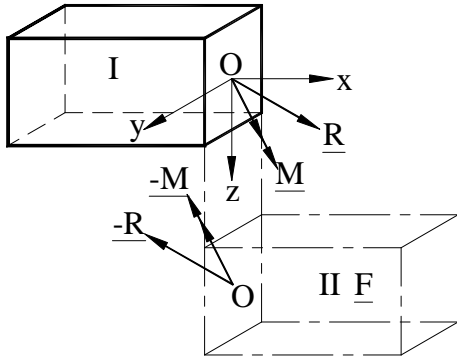
$$\sum_{CK} \underline{F} = 0 \quad ; \quad \sum_{CK} \underline{M} = \sum_{CK} \underline{r} \cdot \underline{F} = 0$$

Burada CK "**Cisim kesiti**"ndeki bütün etki eden büyüklükler demektir. Bunu bir cisim veya sistemin bir parçası olarak ayırıp bütün etki kuvvetlerini gösterirsek SCD "**Serbest Cisim Diyagramı**" nı elde ederiz.

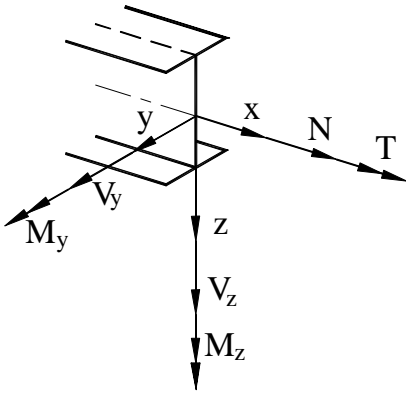
Denge şartı genelde altı eşitlik denklemiyle gösterilir. Yalnız kuvvetlerin analiziyle kalmayıp momentlerinde analizini yaparsak altı eşitlik denklemini buluruz., fakat bunlar yeni bir şey getirmez.

$$\sum_{CK} \underline{r}' \cdot \underline{F} = \sum_{CK} (\underline{r} - \underline{r}'') \cdot \underline{F} = \sum_{CK} \underline{r} \cdot \underline{F} - \underline{r}'' \cdot \sum_{CK} \underline{F} = 0$$

0.2. Kesit büyüklükleri ve statik belirlilik



Şekil 2, Kesit büyüklükleri



Şekil 3, Cismi etkileyen büyüklükler

Cismin kesiti I ve II için (Şekil 2);

$$-\underline{R} + \sum_{II} \underline{F} = \underline{0} \quad ; \quad -\underline{M} + \sum_{II} \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0}$$

Böylece "Düname" oluşur.

$$\underline{R} = \sum_{II} \underline{F} \quad ; \quad \underline{M} = \sum_{II} \underline{r} \times \underline{F}$$

Düname etki noktası "O" daki reaksiyon etkilerinden oluşur.

Kirişteki kesit büyüklükleri:

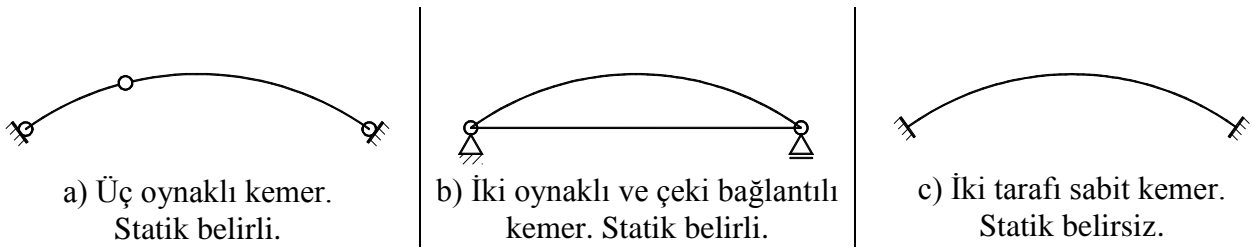
$$\underline{R} = (N, V_y, V_z) \quad , \quad \underline{M} = (T, M_y, M_z)$$

DIN ve EN standartlarına göre cismi etkileyen büyüklükler. Bkz. Şekil 3.

N	N	Normal kuvvet
V_y, V_z	N	x-eksenine dik kuvvet
T	Nm	Torsiyon momenti
M_y, M_z	Nm	Eğilme momenti

Kurulan denge şartları denklemleriyle sistemdeki reaksiyonlar hesaplanabiliyorsa o sistem "**Statik Belirli Sistem**" dir.

Statik belirli ve belirsiz sistemler için basit örnekler:

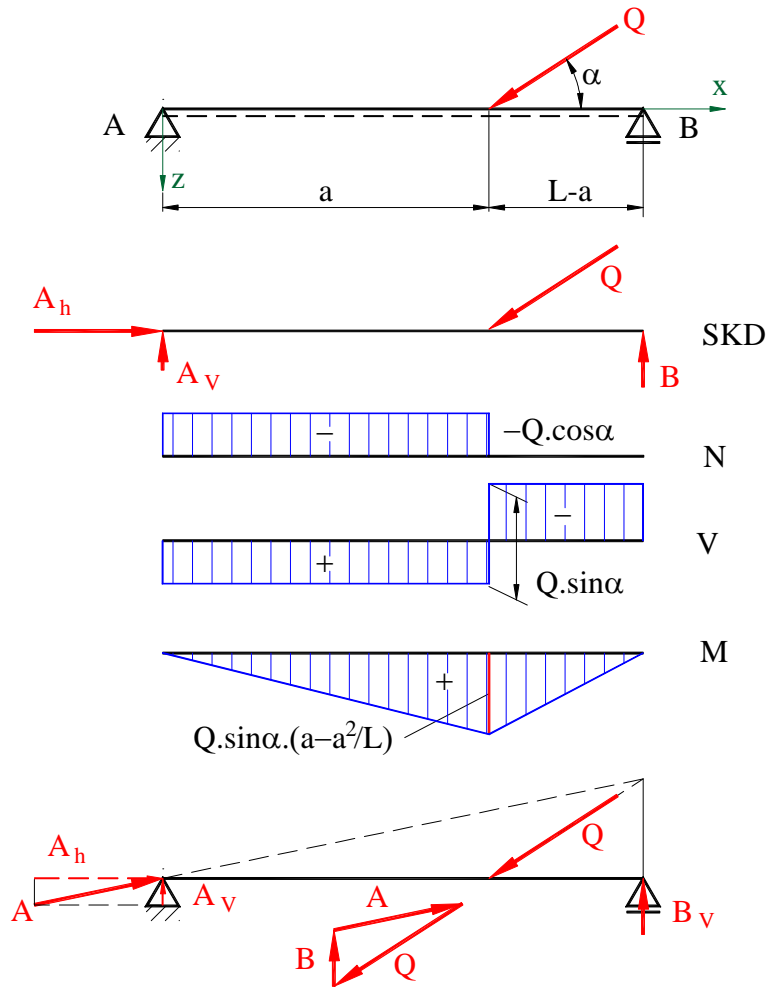


Şekil 4, Statik belirli ve belirsiz sistemler

Şekil 4, a ve b ile verilmiş olan kemerler "**Dıştan Statik Belirli**", yani; basit kirişte olduğu gibi reaksiyonlar rahatlıkla hesaplanır. Fakat "**İçten Statik Belirsiz**" dirler.

Reaksiyon büyüklüklerini hesaplamak için denge denlemlerinin yanı sıra, deformasyon bağıntılarında hesaba katılmalıdır.

0.3. Denge denklemleriyle genel çözüm



Şekil 5, Denge denklemleriyle çözüm

$$1. \text{ DD} : \sum F_h = 0 \Rightarrow A_h = Q \cdot \cos \alpha$$

$$2. \text{ DD} : \sum M_A = 0 \Rightarrow B = Q \cdot \sin \alpha \cdot a / L$$

$$3. \text{ DD} : \sum F_v = 0 \Rightarrow A_v = Q \cdot \sin \alpha \cdot (1 - a/L)$$

Grafik olarak kuvvetler "Kuvvet Poligonu" ile bulunur.

A, B ve Q kuvvetleri kapalı bir üçgen oluşturmalıdır ve kuvvetler bir noktada kesişmelidir. Bkz. Şekil 5.

Denge denklemleriyle genel çözüm için denge denklemleri **DD** yazılır:

1. **DD**; Yatay kuvvetlerin toplamı sıfırdır;

$$\sum F_h = 0$$

$$A_h - Q \cdot \cos \alpha = 0$$

2. **DD**; Yataklarda momentlerin toplamı sıfırdır;

$$\sum M_A = 0$$

A yatağında

$$M_A = B \cdot L - Q \cdot \sin \alpha \cdot a = 0$$

3. **DD**; Dikey kuvvetlerin toplamı sıfırdır;

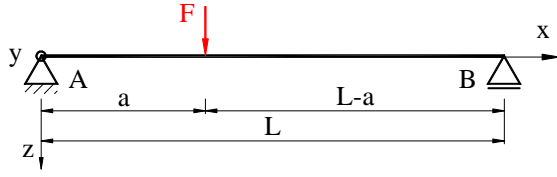
$$\sum F_v = 0$$

$$A_v \cdot L + Q \cdot \sin \alpha \cdot (L - a) = 0$$

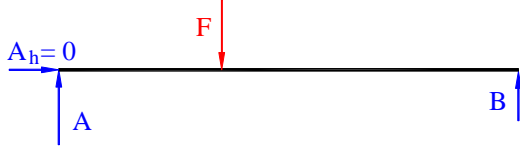
Denge denklemlerinden **reaksiyonlar** bulunur

0.4. Reaksiyon ve Kesit büyüklükleri

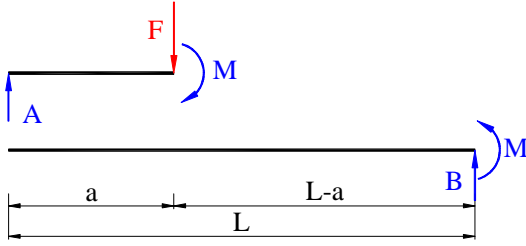
Reaksiyon ve Kesit büyüklüklerini incelemek için Şekil 6 ile görülen z-ekseni yönünde tek kuvvet etkisindeki "Klasik kiriş" ele alıp inceleyelim.



Şekil 6, Klasik kiriş



Şekil 7, Serbest Cisim Diyagramı "SCD"



Şekil 8, A yatağında F momenti M

Şekil 6 ile görüldüğü gibi A yatağı her üç yönde sabit, **Hareketsiz yatak**, B yatağı ise y ve z yönlerinde sabit x yönünde hareketlidir, **Hareketli yatak**. A yatağını F kuvvetinin x ve z yönündeki bileşenleri, ama B yatağını yalnız z-yönündeki bileşeni etkiler.

Kirişteki yatakları dikkate almadan yalnız A ve B yataklarındaki reaksiyonları kirişin nötr eksteni ile çizerek "**Serbest Cisim Diyagramı**" nı buluruz, kısa tanımı "**SCD**". Bkz. Şekil 7.

Gayet kolaylıkla görüleceği gibi, F kuvveti kiriş tam dik olduğundan A yatağına x-yönünde kuvvet etkisi olmaz.

SCD da yalnız A yatağını ele alıp B yatağını yok sayarsak "F" kuvveti kirişi A yatağında y-ekseni etrafında saat dönüşü yönünde döndürmeye zorlar. Döndürme a mesafesi ile orantılıdır, ve bunu A yatağında y-eksenine göre moment olarak (F.a) yazabiliriz. Ama kiriş A yatağı etrafında dönemediğine göre, dengenin sağlanması ve sistemin stabil kalması için B yatağında da saat dönüşüne ters yönde bir moment etkisi olmalıdır. Bkz. Şekil 8.

Böylece şu denge formülü yazılır;

$$B \cdot L = F \cdot a$$

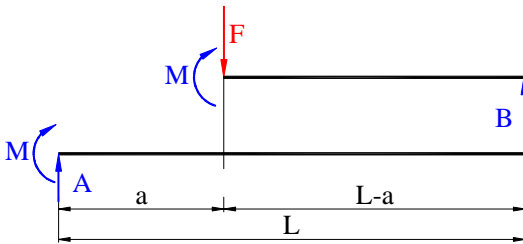
Buradanda B yatağına etkileyen kuvvet bulunur:

$$B = \frac{F \cdot a}{L}$$

F 1

B	N	B yatağındaki kuvvet
F	N	Kirişi etkileyen kuvvet
a	m	Kuvvetin A yatağına mesafesi
L	m	Kirişin AB mesafesi

Bu düşüncüyü aynen B yatağı için yaparsak:



Şekil 9, B yatağındaki F ve A momenti

Böylece şu denklemi buluruz;

$$A = \frac{F \cdot (L - a)}{L}$$

F 2

A	N	A yatağındaki kuvvet
F	N	Kirişi etkileyen kuvvet
a	m	Kuvvetin A yatağına mesafesi
L	m	Kirişin AB mesafesi

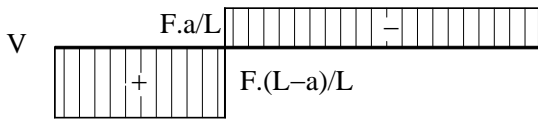
Burada sağlamayı yaparsak:

$$A + B = F \cdot \left(\frac{a}{L} + \frac{L-a}{L} \right) = F$$

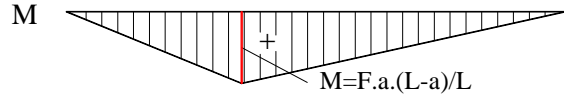
bulunur. Buda mekaniğin denge denklemlerinden biridir. Aynı yöndeki kuvvetlerin toplamı sıfırdır;

$$\Sigma F_z = 0$$

denlemini teyid eder.

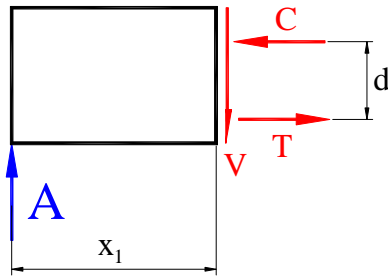


Şekil 10, Dik kuvvet V (F_z) dağılımı



Şekil 11, Eğilme momenti M dağılımı

A yatığı ile F kuvveti arasında kirişe dik bir kesiti düşünersek, bu kesit kirişi sol ve sağ parçalar olarak ikiye ayırır. Biz sol taraftaki parçayı ele alıp inceleyelim. Şekil 12 ve $0 \leq x_1 \leq x$.



Şekil 12, Kesitin sol parçası

Kesitin x_1 boyunu tam F kuvvetinin olduğu yere çekersek, kirişi etkileyen dik kuvvetin, dik kuvvet "V" ye eşit olur.

$$V = A$$

Dik kuvvet "V" ile "A" yatağı kuvveti saat dönüş yönünde moment oluşturur. Bu momenti yatay etkili önceden bilinmeyen "d" mesafeli "T = C" kuvvet çifti karşılar.

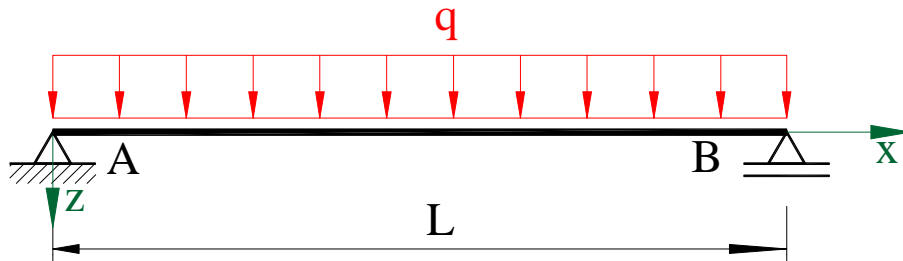
Burada denge formülünü yazarsak kesitteki momenti buluruz;

$$A \cdot x_1 = T \cdot d = M$$

Şekil 12 ile kesit büyüklükleri dik kuvvet V ve eğilme momenti M de görülmektedir. Yatay çift kuvvetler T=C yerine, genelde bunların oluşturduğu moment $M=T \cdot d$ kullanılır. Bu momentler kirişi eğmeye zorladıklarından "**Eğilme momenti**" denir. Bu durumun analizini ilerde sayfa 14, paragraf 1.2 ile yapacağız.

0.5. Statik problemlerinin çözümünde tutulacak yol

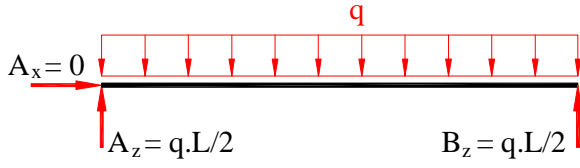
Statik problemlerinin çözümünde tutulacak yolu bir örnekle görelim. Örneğimiz sabit yayılı yüklerle zorlanan klasik kiriş olsun, Şekil 13, q =sabit.



Şekil 13, Sabit yayılı yüklü klasik kiriş

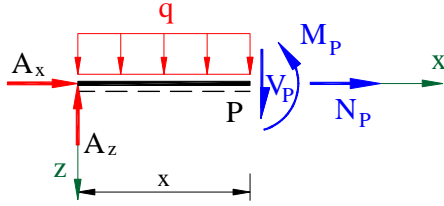
① Sistemi veya kısmi sistemi etkileyen bilinen veya bilinmiyen bütün kuvvet ve momentler bir krokide gösterilir ve buna "**Serbest Cisim Diyagramı**", kısa tanımı "**SCD**" denir.

SCD 1 ; Sistemin SCD si



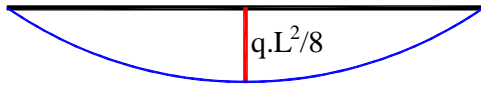
Şekil 14, Sabit yayılı yüklü klasik kirişte SCD 1

SCD 2 ; Kısmi sistemin SCD si



Şekil 15, Sabit yayılı yüklü klasik kirişte SCD 1

Moment dağılımı



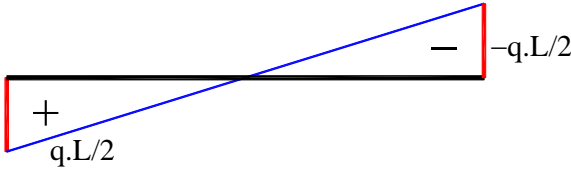
Türevi alınmış



İntegrasyonu yapılmış



Dik kuvvet dağılımı



Normal kuvvet dağılımı



Şekil 16, Sabit yayılı yüklü klasik kirişte dağılımlar

② SCD 1 e göre yatay etkili kuvvet yoktur. **DD**

$$\mathbf{1:} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \boxed{A_x = 0}$$

DD 2: A yatağına göre moment, uç yatak moment sıfır, temel kural.

$$-B_z \cdot L + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\boxed{B_z = \frac{q \cdot L}{2}}$$

DD 3: $\Sigma F_z = 0 \quad -B_z + q \cdot L - A_z = 0$

$$\boxed{A_z = \frac{q \cdot L}{2}}$$

③ SCD 2 ye göre moment denklemi:

$$\mathbf{DD 1:} \quad \Sigma M_P = 0 \quad M_P + qx \cdot \frac{x}{2} - A_z \cdot x = 0$$

Parabol

$$\boxed{M_P = \frac{q \cdot x}{2} \cdot (L - x)}$$

DD 2: $\Sigma F_z = 0 \quad V_P + q \cdot x - A_z = 0$

$$\boxed{V_P = q \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right)}$$

④ Kesit büyüklükleri:

Moment:

Dik kuvvet dağılımı biliniyorsa dik kuvvetin integrasyonu alınırsa Moment dağılımı bulunur.

Moment dağılımı biliniyorsa momentin türevi alınırsa dik kuvvet dağılımı bulunur.

Maksimum moment $x=L/2$:

$$M_{\max} = \frac{q}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(L - \frac{L}{2} \right) \quad \boxed{M_{\max} = \frac{q \cdot L^2}{8}}$$

$$\boxed{q = -\frac{dV_z}{dx} = -\frac{d^2M_y}{dx^2}}$$

Dik kuvvet:

$$V_P = q \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

 $x=0$ veya $x=L$ ise dik kuvvet maksimumdur.

$$V_{\max(x=0)} = q \cdot \left(\frac{L}{2} - 0 \right)$$

$$\boxed{V_{\max} = \frac{q \cdot L}{2}}$$

$$V_{\max(x=L)} = q \cdot \left(\frac{L}{2} - L \right)$$

$$\boxed{V_{\max} = -\frac{q \cdot L}{2}}$$

 $x=L/2$ ise dik kuvvet sıfırdır

$$V_{\max(x=L/2)} = q \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \right)$$

$$\boxed{V = 0}$$

$$\boxed{V_z = -\frac{dM_y}{dx}}$$

Normal kuvvet:

$$\boxed{N = A_x = 0}$$

1. Deformasyonlar

Klasik kirişteki deformasyonu incelemek istersek, kirişteki gerilim " σ " (yerel etkilerin alana bölümü) ile bu gerilimden oluşan uzamanın " ε " (birim boyundaki kiriş parçasının esnemesi, uzama veya kısalması) doğrusal (linear) orantılı olduğu kabul edilirse, yani işlemler "**Hook kanunları**" dahilindeki sahada oluyorsa (Bkz. Mukavemet değerleri) şu eşitlikler yazılır (Bkz. F 3, F 4 ve F 5).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{F 3}$$

veya

$$E = \sigma / \varepsilon \quad \text{F 4}$$

veya

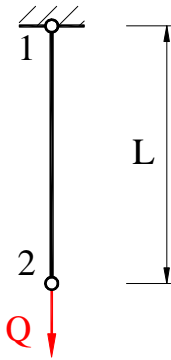
$$\varepsilon = \sigma / E \quad \text{F 5}$$

Buradaki orantı faktörü E "**Elastiklik modülü**" dür.

Bu tanımlamaları daha iyi anlamamız için bir örnekle tanımlamaları anlatalım.

1.1. Boyuna deformasyon

Problem;



Şekil 17, Asılı halat

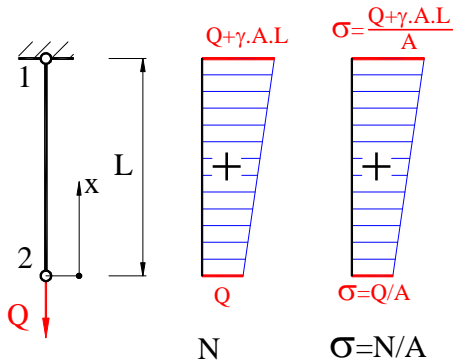
1 numaralı noktada sabit bağlanmış, 2 numaralı noktada Q yükü ile yüklenmiş bir halatı kabul edelim. Halatın kendi öz ağırlığı etkisinde kopmaması ve Q yükünü taşıması için halatın boyu ne kadar olabilir?

Halat kesit alanı sabit kabul edilmektedir.

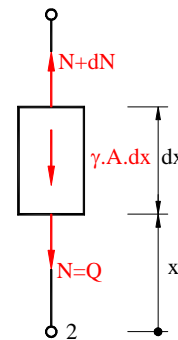
Q	kN	Taşınan yük
A	m ²	Halat kesit alanı, sabit kabul edilmektedir
f	kN/m ²	Çekme mukavemeti
σ	kN/m ²	Çekme gerilimi
L	m	Uzunluk
γ	kN/m ²	Özgül ağırlık
N	kN	Normal kuvvet

Çözüm 1, A=sabit;

Çekme gerilimlerini daima pozitif "+", Bası gerilimlerini daima negatif "-" olarak gösteririz. Önce SCD nı çizelim, Şekil 19.



Şekil 18, Asılı halatta kesit büyüklükleri, A sabit



Şekil 19, Asılı halat için SCD, A sabit

Şekil 19 ile görülen durumda x yönündeki denge denklemini yazarsak:

$$\sum F_x = 0$$

$$N + dN - \gamma \cdot A \cdot dx - N = 0$$

$$dN - \gamma \cdot A \cdot dx = 0$$

$$dN = \gamma \cdot A \cdot dx$$

Bu denklemin integralini alırsak:

$$N = \gamma \cdot A \cdot x + C$$

Burada $x=0$ iken $N=Q$ olduğundan $C=Q$ olmalıdır. C nin değerini yerleştirirsek;

$$N = \gamma \cdot A \cdot x + Q \quad \text{F 6}$$

Diğer taraftan biliyoruz ki teoretik olarak kopma gerilimi kopma mukavemetine eşit olunca halat kopar.

$$\begin{aligned} \sigma &= f \\ \sigma &= N/A \\ N/A &= f \end{aligned}$$

$$N = A \cdot f \quad \text{F 7}$$

Bu değeri yukarıdaki formüle (F 6) yerleştirir ve $x =$ halatın tam boyunu alırsak, denkleminiz şu şekli alır:

$$\gamma \cdot A \cdot L + Q = A \cdot f$$

Diğer taraftan ilk terim halatın ağırlığıdır "G":

$$\gamma \cdot A \cdot L = G$$

$$G + Q = A \cdot f \quad \text{F 8}$$

$$Q = A \cdot f - G$$

denklemin A.f ye bölerek

$$\frac{Q}{A \cdot f} = 1 - \frac{G}{A \cdot f}$$

tekrar G yerine $\gamma \cdot A \cdot L$ yerleştirirsek

$$\frac{Q}{A \cdot f} = 1 - \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{A \cdot f}$$

$$\frac{Q}{A \cdot f} = 1 - \frac{\gamma \cdot L}{f}$$

F 7 ile $Q=0$ ise

$$A \cdot f = \gamma \cdot A \cdot L$$

Buradanda kopma boyu

$$L_0 = f / \gamma$$

bulunur.

Burada

$$\frac{\gamma \cdot L}{f} : \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{L}{f/\gamma}$$

işlemini yaparsak

Burada $f / \gamma = L_0$ yerleştirelim;

$$\frac{Q}{A \cdot f} = 1 - \frac{L}{L_0}$$

burada F 8 yerleştirilirse

Buraya kadar yaptıklarımızı toplarsak şu eşitlikleri yazabiliriz:

$$\frac{Q}{G+Q} = \frac{Q}{A \cdot f} = 1 - \frac{\gamma \cdot L}{f} = 1 - \frac{L}{L_0}$$

$$\frac{Q}{G+Q} = 1 - \frac{L}{L_0}$$

F 9

Şimdi G/Q oranısını hesaplayalım:

$$\frac{G}{Q} = \frac{G}{A \cdot f - G} = \frac{1}{\frac{A \cdot f}{G} - 1}$$

$$\frac{G}{Q} = \frac{1}{\frac{A \cdot f}{G} - 1}$$

Burada $\frac{A \cdot f}{G}$ terimini ele alalım ve $f = \gamma \cdot L_0$; $G = \gamma \cdot A \cdot L$ yerleştirelim:

$$\frac{A \cdot f}{G} = \frac{A \cdot \gamma \cdot L_0}{\gamma \cdot A \cdot L}$$

Böylece eşitliğimiz:

$$\frac{A \cdot f}{G} = \frac{L_0}{L}$$

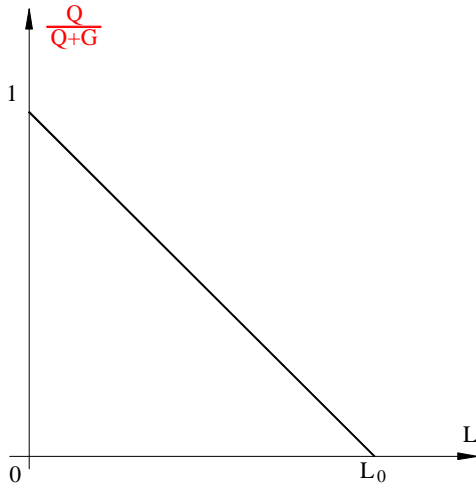
$$\frac{G}{Q} = \frac{1}{\frac{L_0}{L} - 1}$$

sağ tarafı L_0/L ile bölersek

$$\frac{G}{Q} = \frac{\frac{L_0}{L}}{1 - \frac{L_0}{L}}$$

F 10

Bulduğumuz bu deierleri diyagramda gösterirsek Şekil 20 ile Şekil 21 elde edilir.

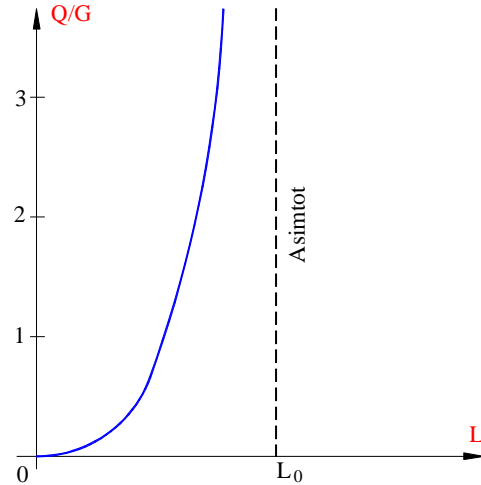


$$\frac{Q}{G+Q} = 1 - \frac{L}{L_0}$$

$$L=0 \quad Q/(G+Q)=1$$

$$L=L_0 \quad Q/(G+Q)=0$$

Şekil 20, $Q/(G+Q)$ orantısı



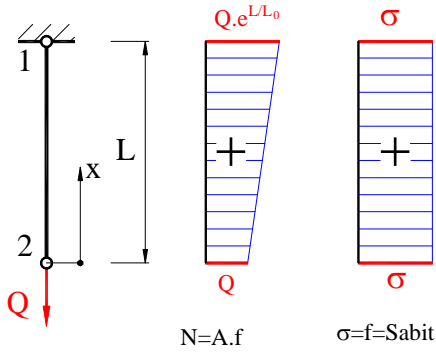
$$L=0 \quad G/Q=0$$

$$L=L_0 \quad G/Q=\infty$$

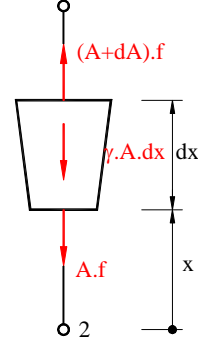
Şekil 21, G/Q orantısı

- Tespitler:
- $Q > 0$ ise L değeri L_0 değerine yaklaştıkça, G değeri doğru sonsuza doğru büyür.
 - $Q > 0$ olduğu takdirde, halatın $Q = 0$ daki kopma boyu L_0 a ulaşamaz.
 - Maliyet fiyatı Q ile $(L_0 - L)^{-1}$ orantılıdır. $\frac{L/L_0}{1 - L/L_0} \cdot \frac{L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0 - L}$
 - Kopma mukavemeti f yalnız 1 numaralı bağlantı yerinde kullanılır.

Çözüm 2, A optimal seçilmiş



Şekil 22, Kuvvet ve gerilim dağılımı, A optimal



Şekil 23, Asılı halat için SCD, A optimal

Şekil 23 ile görülen durumda x yönündeki denge denlemini yazarsak:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad (A + dA) \cdot f - \gamma \cdot A \cdot dx - A \cdot f &= 0 \\ f &= \frac{G}{A} = \gamma \cdot L_0 \\ dA \cdot f - \gamma \cdot A \cdot dx &= 0 \\ dA \cdot L_0 &= A \cdot dx \\ \frac{dA}{A} &= \frac{dx}{L_0} \end{aligned}$$

Bu denklemin integralini alırsak:

$$A = C \cdot e^{x/L_0}$$

Burada $x=0$ olduğunda $A = Q/f$ olduğu için F 11 elde edilir.

$$A = \frac{Q}{f} \cdot e^{x/L_0} \quad \text{F 11}$$

Diğer taraftan:

$$G = \int_0^L \gamma \cdot A \cdot dx = \int_0^L \gamma \cdot \frac{Q}{f} \cdot e^{x/L_0} \cdot dx = \gamma \cdot \frac{Q}{f} \cdot L_0 \cdot e^{x/L_0} \Big|_0^L$$

$$G = \gamma \cdot \frac{Q}{f} \cdot L_0 \cdot e^{L/L_0} - \gamma \cdot \frac{Q}{f} \cdot L_0$$

$$G = \gamma \cdot \frac{Q}{f} \cdot L_0 \cdot (e^{L/L_0} - 1)$$

$$f = \gamma \cdot L_0$$

$$G = Q \cdot (e^{L/L_0} - 1) = Q \cdot e^{L/L_0} - Q$$

$$G + Q = Q \cdot e^{L/L_0}$$

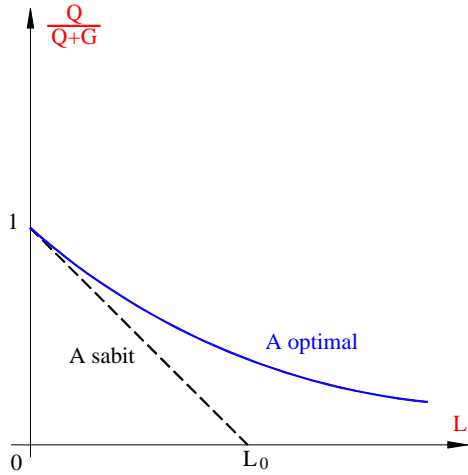
$$\frac{Q}{G + Q} = e^{-L/L_0} \quad \text{F 12}$$

$$\frac{G + Q}{Q} = e^{L/L_0}$$

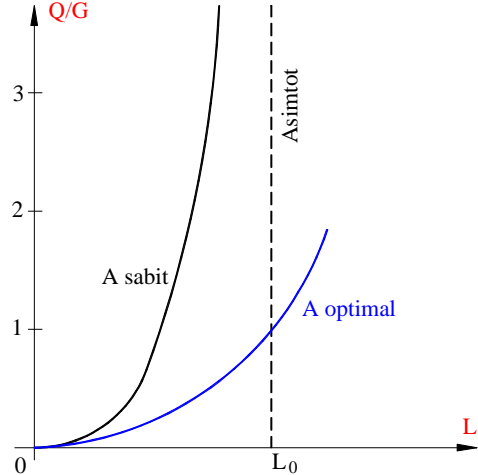
$$\frac{G}{Q} = e^{L/L_0} - 1 \quad \text{F 13}$$

bulunur.

Bulduğumuz bu daireleri diyagramda gösterirsek Şekil 24 ile Şekil 25 elde edilir.



Şekil 24, $Q/(G+Q)$ orantısı



Şekil 25, G/Q orantısı

- Tespitler:
- Optimal seçilen kesit alanıyla kopma mukavemeti f her yerde kullanılır.
 - $Q > 0$ için teorik olarak L değeri L_0 değerinden daha büyük olabilir.
 - Konstrüksiyonun maliyeti A sabitten daha ekonomik olur.

Çelik halat için küçük bir sayısal örnek verelim.

Özgül ağırlığı ; $\gamma_{\text{Çe}} = 78,5 \text{ kN/m}^3$, Kopma mukavemeti $f = 500 \text{ N/mm}^2 = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ kabul edelim.

$$L_0 = f / \gamma = 500 \cdot 10^3 / 78,5 = 6369,4$$

$$L_0 = 6369,4\text{m}$$

1.2. Enine deformasyon (sehim), Galile'nin problemi,

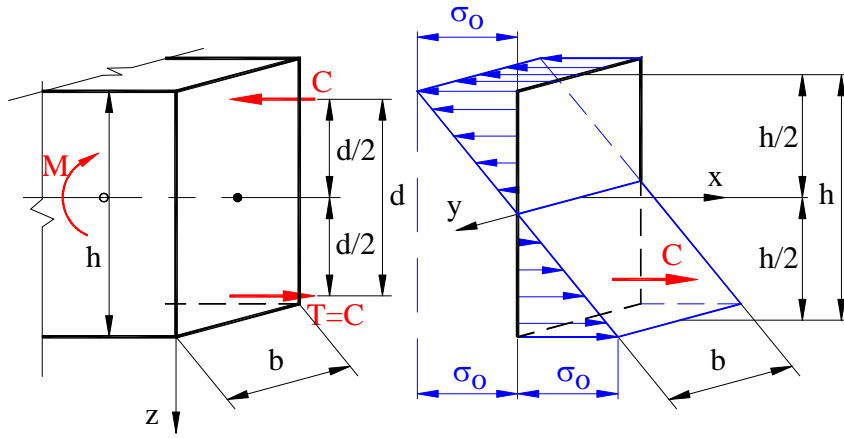
Enine deformasyon problemi Galile (Galileo Galilei, 1564-1642, İtalyan) ile başlar. Problem; dik kuvvetin oluşturduğu deformasyonları dikkate almadan, yalnız eğilme momentlerinin oluşturduğu deformasyonları ele alıp, kirişi bütün boyunda "b" genişliğinde, "h" yüksekliğinde ($h > b$) sabit dikdörtgen kabul edersek, Şekil 26, ile görülen durum ortaya çıkar.

Kirişte oluşacak deformasyonların analizini ve hesabını yapabilmek için; **gerilim " σ "** (alan birimini etkileyen lokal kuvvetler) ile **esneme " ε "** (birim boyunun esnemesi, uzama veya kısalması) arasında **Hook** kanunu dediğimiz orantıyı kabul etmemiz gereklidir.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

F 14

σ	MPa	Kesitteki gerilim
E	MPa	Elastiklik modülü, orantı faktörü
ε	1	Esneme



Şekil 26, Dikdörtgen kesitte gerilim dağılımı

Nötr eksenini kirişin yarı yüksekliğinde olmalıdır. Nötr ekseninin üst tarafı basıya alt tarafında çekiye zorlanacaktır ve z değeri ile lineer değişecektir. Böylece şu kabul ortaya çıkar; hesaplarda çekme gerilimi pozitif (+), bası gerilimi negatif (-) kabul edilir. Kesitin herhangi bir yerindeki gerilim:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{2 \cdot z}{h}$$

büyükliğindedir.

Şekil 26, ile görülen $T=C$ kuvvetini hesaplayalım. ABM tabanlı ve b yükseklikli üçgen prizmanın hacmi C kuvveti kadardır.

$$T = C = \sigma_0 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \quad \boxed{C = \sigma_0 \cdot \frac{b \cdot h}{4}}$$

Ve kuvvet ağırlık merkezinden zorlayacağına göre:

$$\frac{d}{2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{buradanda} \quad \boxed{d = \frac{2 \cdot h}{3}} \quad \text{bulunur.}$$

Bu değerleri moment formülünde yerleştirirsek:

$$M = C \cdot d = \sigma_0 \cdot \frac{b \cdot h}{4} \cdot \frac{2 \cdot h}{3} = \sigma_0 \cdot \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Yukarıda kesitin geometrik ölçüleri ile hesaplanan faktöre kesitin "**Karşıkoyma momenti**" denir ve sembolüde "W" harfiyle gösterilir. Galile paydayı "2" kabul etmişti.

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

F 15

W	mm ³	Dikdörtgen kesitin karşıkoyma momenti $b < h$
b	mm	Kesitin eni
h	mm	Kesitin yüksekliği

Böylece yeni bir orantı bağlantısı bulunur ve çeşitli şekillerde yazılabilir.

$$M = \sigma_o \cdot W$$

F 16

$$W = \frac{M}{\sigma_o}$$

F 17

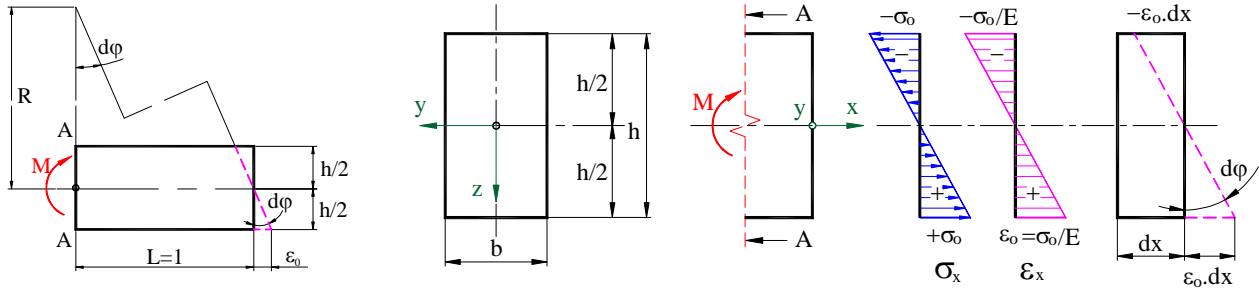
$$\sigma_o = \frac{M}{W}$$

F 18

σ_o	MPa	Kesitteki normal gerilim
M	Nmm	Kesiti etkileyen moment
W	mm ³	Kesitin karşıkoyma momenti

1.2.1. Kavis

Kavisi bulmak için eğilme momentinin zorladığı Şekil 27 ile görülen bir kirişten A-A kesiti ile başlayan çok küçük bir birim boyu kısmını ele alalım. Kabul ettiğimiz boy çok küçük olduğundan eğimin merkezinden bu boyu gören açıda çok küçüktür ve bunu $d\phi$ olarak adlandıralım.



Şekil 27, Kavis

$d\phi$ açısı çok küçük olduğundan açının tanjant değeri ile radyan değerini eşit kabul edebiliriz ve χ değerini eğimden oluşan kavis olarak tanımlarız.

$$\tan d\phi \approx d\phi = \chi$$

F 19

$d\phi$	rad	Kesiti gören eğimin merkez açısı
χ	rad	Kavis

Şekil 27 ile görülen kiriş parçasını analiz edersek, şu bağıntıları buluruz:

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{2 \cdot \epsilon_o}{h}$$

F 20

$$\chi = \frac{d\phi}{dx} = \phi'$$

F 21

Buradan $\Rightarrow \epsilon_o = \frac{h \cdot \chi}{2}$ bulunur.

Diğer taraftan F 16 ile moment $M = \sigma_o \cdot W$ dir. Burada değerleri yerleştirirsek:

$$M = E \cdot \frac{h \cdot \chi}{2} \cdot \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$M = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot E \cdot \chi$$

Yukarıda kesitin geometrik ölçüleri ile hesaplanan faktöre kesitin "**Eylemsizlik momenti**" veya "**Atalet momenti**" denir ve sembolüde "I" harfiyle gösterilir. Şekil 27 ile gösterilen R "**Kavis radyosu**" dur.

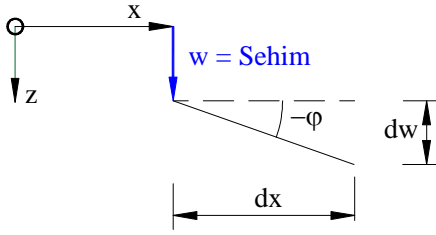
$$M = E \cdot I \cdot \chi$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

F 22

I	mm ⁴	Dikdörtgen kesitin eylemsizlik momenti b < h
b	mm	Kesitin eni
h	mm	Kesitin yüksekliği

Kirişin küçük bir parçasını ele alalım. Burada $\tan \varphi = w' = \frac{dw}{dx} = -\varphi$ bağıntısı mevcuttur.



Şekil 28, Sehim w

Buradan:

$$w'' = -\varphi' = -\chi$$

Bulunur.

$$\chi = -w''$$

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$$

$$\varepsilon_0 = M / W$$

$$W = 2 \cdot I / h$$

Buradanda kavis bağıntılarını şu şekilde yazabiliriz, F 23.

$$\chi = -w'' = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{2 \cdot M}{E \cdot W \cdot h} = \frac{2 \cdot \varepsilon_0}{h}$$

F 23

χ	1/mm	Kavis
M	Nmm	Kesiti etkileyen moment
E	MPa	Elastikiyet modülü
I	mm ⁴	Dikdörtgen kesitin eylemsizlik momenti b < h
W	mm ³	Kesitin karşıkoyma momenti
h	mm	Kesitin yüksekliği
ε_0	%	Parçadaki esneme

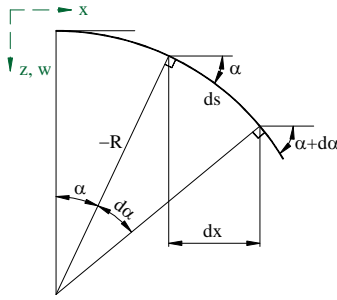
Sehimi mekaniğin diferansiyel denklemi olarak w sehimi iki defa türevi alınan şu bağıntı ile hesaplanır.

$$w'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \text{veya} \quad w'' + \frac{M}{E \cdot I} = 0$$

F 24

w''	1/mm	Sehimin ikinci dereceden türevi
M	Nmm	Kesiti etkileyen moment
E	MPa	Elastikiyet modülü
I	mm ⁴	Dikdörtgen kesitin eylemsizlik momenti
EI	Nmm ²	Eğilme rijitliği

1.2.2. Sehimin kavis ile hesaplanması



Şekil 29, Kavisten sehimi

Burada
ve

$$\tan \alpha = w'$$

$$\tan(\alpha + d\alpha) = w' + w'' \cdot dx$$

vede

$$ds = -R \cdot d\alpha = dx \cdot \sqrt{1 + w'^2}$$

$$d\alpha \approx \tan(d\alpha) = \frac{w' + w'' \cdot dx - w'}{1 + (w' + w'' \cdot dx) \cdot w'}$$

Olarak kabul edersek, buradan şu bağıntıyı buluruz.

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \quad \text{F 25}$$

Burada w'^2 dikkate alınmayacak kadar küçük olduğundan paydayı "1" kabul edebiliriz. Böylece kavisin değeri F 26 ile bulunur.

$$\chi = -w''$$

F 26

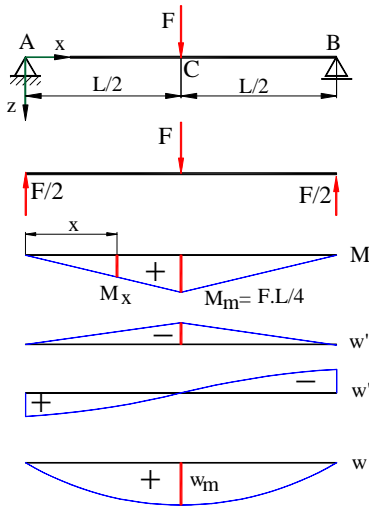
χ	1/mm	Kavis
w''	1/mm	Sehimin ikinci dereceden türevi

Eğer w'' ön işareti pozitif (+) çıkarsa kirişin sehimi yukarıya doğrudur. Şekil 29 ile görülen kiriş sehimi aşağıya doğrudur ve ön işareti negatiftir (-).

1.2.3. Sehimin pratikte hesaplanması

1.2.3.1. Tek kuvvetle zorlanan basit kiriş

Daha önce kullandığımız ve bildiğimiz basit kirişi ele alalım ve tam ortasından F kuvveti ile zorlandığını kabul edelim, Şekil 30 için şu bağıntıları yazabiliriz.



Şekil 30, Basit kirişte sehimi

$$w'' = \frac{-M_x}{E \cdot I} = \frac{-F \cdot L}{4 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2 \cdot x}{L} = \frac{-F \cdot x}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$M_x = M_m \cdot \frac{2 \cdot x}{L} = \frac{F \cdot L}{4} \cdot \frac{2 \cdot x}{L} = \frac{F \cdot x}{2}$$

$$w'' = \frac{-F \cdot x}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$w' = w'' \cdot dx = \frac{-F \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + c_0$$

Kirişin ortasında $x=L/2$ de $\tan \alpha = w' = 0$ olacağından, $x=L/2$ yerleştirilir ve c_0 bulunur.

$$c_0 = \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I} \quad w' = \frac{-F \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$w = w' \cdot dx = \frac{-F \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{F \cdot L^2 \cdot x}{16 \cdot E \cdot I} + c_1$$

B yatağında $x = L$ değerinde sehimi sıfır olacağından c_1 değeri sıfırdır ve $x = L$ yerleştirirsek, Kirişin maksimum sehimi formülünü buluruz. Bu literatürlerde verilen formüldür.

$$w_{\max} = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

F 27

F	N	Kuvvet
L	mm	Kirişin etkilenen boyu
E	MPa	Elastikiyet modülü
I	mm ⁴	Kesitin eylemsizlik momenti

1.1.1.1. Sayısal örnek 1

Yataklar arası mesafesi $L=1,8$ m olan basit kirişin dörtköşe kesit boyutları $b=20$ mm, $h=40$ mm dir. Kirişin tam ortasından $F=1$ kN kuvvetle zorlanmaktadır. Kiriş malzemesi çelik $E= 210'000$ MPa dir. Kirişteki gerilimi hesaplırsak:

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} \quad ; \quad M = \frac{F \cdot L}{4} \quad ; \quad W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\sigma_0 = \frac{3 \cdot F \cdot L}{2 \cdot b \cdot h^2} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1800}{2 \cdot 20 \cdot 40^2} = 84,4 \text{ MPa}$$

Kirişin orta noktasındaki sehim:

$$w_m = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{F \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3} = \frac{10^3 \cdot 1800^3}{4 \cdot 210000 \cdot 20 \cdot 40^3} = 5,42 \text{ mm}$$

Burada teorik olarak bulduğumuz basit kirişteki sehim sayısal olarak görmek istersek, şu örneği ele almamız gerekir:

1.1.1.2. Sayısal örnek 2

Bir deneyde, tahtadan yataklar arası $L=1,8$ m, kesit genişliği $b=325$ mm, kesit yüksekliği $h= 22$ mm ve $x=L/2$ de $F=1$ kN kuvvetle zorlanan basit kirişin elastikiyet modülü $E= 10$ kN/mm² kabul edilmiştir.

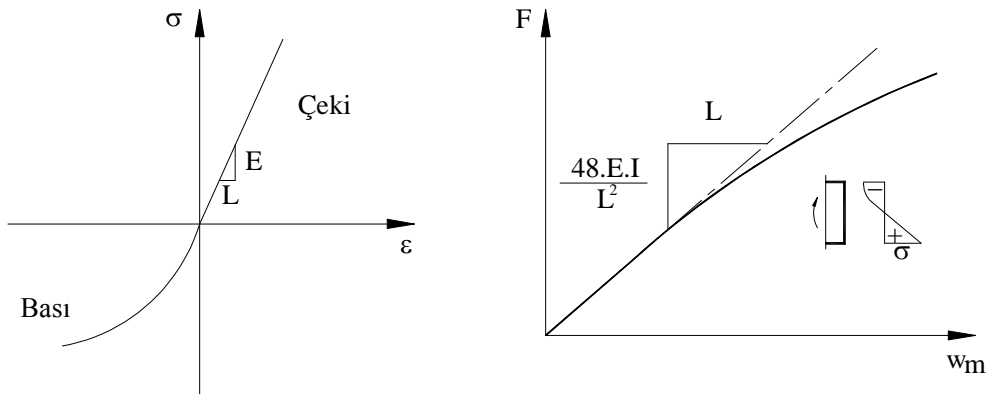
Kirişin kenarlarda $x=L/2$ noktasındaki σ_0 gerilimini hesaplırsak,

$$\sigma_0 = \frac{F \cdot L}{4 \cdot W} = \frac{3 \cdot F \cdot L}{2 \cdot b \cdot h^2} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1800}{2 \cdot 325 \cdot 22^2} = 17,2 \text{ N/mm}^2$$

Kirişin $x=L/2$ noktasındaki sehim w_m hesaplanırsa,

$$w_m = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{F \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3} = \frac{10^3 \cdot 1800^3}{4 \cdot 10^4 \cdot 325 \cdot 22^3} = 42,1 \text{ mm}$$

Kirişin kenarlardaki gerilimi " σ_0 " tahtanın emniyetli mukavemet değerine göre oldukça yüksek ve Gerilim-Uzama orantısının doğrusallığıda yaklaşık olarak oluşmaktadır. Bu durumdan ötürü artan F kuvveti ile dahada kavislenen F - w_m -Diyagramı oluşur. Bak Şekil 31.



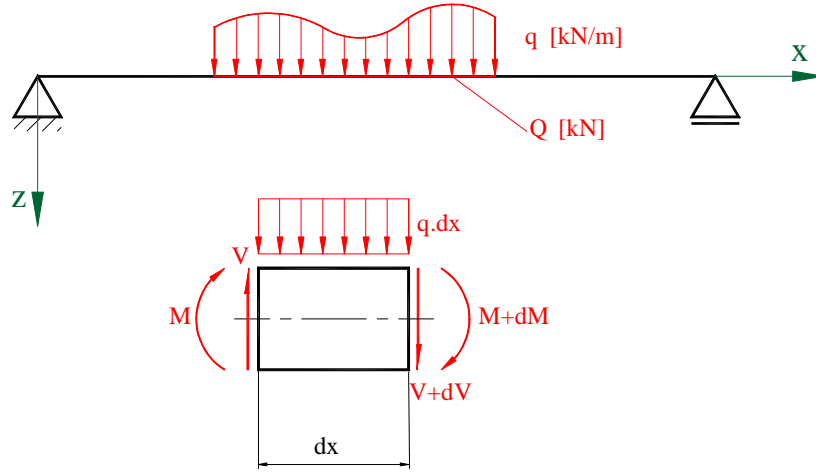
Şekil 31, Tahtadan basit kiriş diyagramları

Yüklemelere göre ölçülen değerler tablosu

Kütle [kg]	F [N]	w_m [mm]	Açıklamalar

1.2.3.2. Yayılı yüklerle zorlanan basit kiriş

Kirişlerde tek veya nokta etkili yüklerin yanında yayılı yüklerde olur. Tek kuvvetlerin dışında etki gösteren yayılı yükleri düşünürsek Şekil 32 ile görülen durum ortaya çıkar.



Şekil 32, Basit kirişte yayılı yük

Kirişin dx boyunda küçük bir parçasını ele alıp inceleyelim. Burada kesitte oluşan dengeye göre:

Dik kuvvet $V = q \cdot dx$

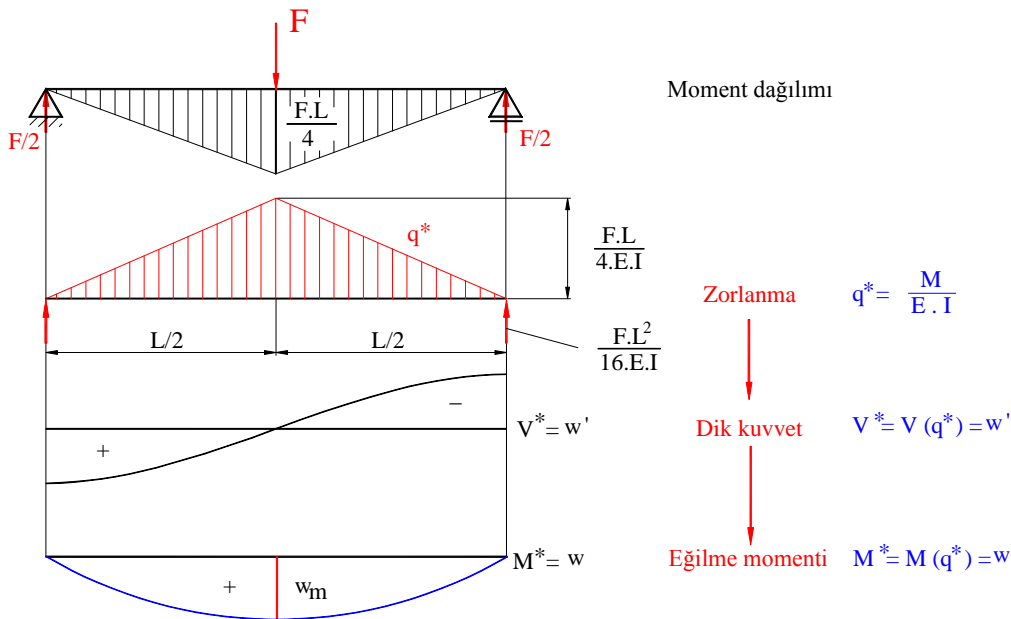
Moment $M = -V \cdot dx$

$$\sum F_V = 0 \quad V + dV = q \cdot dx + dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -q$$

$$\sum M = 0 \quad M + dM = -V \cdot dx + dM = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = V$$

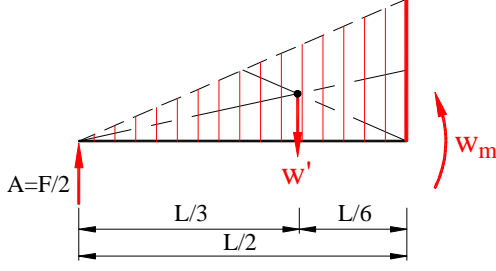
Bağıntılarını kurabiliriz. Buradanda; $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$ $M'' = -q$

$M'' = -q$ diferensiyel denklemi yukarıda gördüğümüz $w'' = -\chi$ diferensiyel denklemine benzer. Burada eşdeğer çözümü düşünürsek sehimide zorlanmaya göre hesaplamak mümkündür (Mohr analojisi).



Şekil 33, Basit kirişte yayılı yük

Moment alanını yayılı yük olarak kabul edip kiriş ortasındaki momenti M_m değerini hesaplarsak:



Şekil 34, Moment alanını yayılı yük

$$M_m = \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{F \cdot L}{4 \cdot E \cdot I}$$

Diğer taraftan kiriş ortasındaki kavis:

$$\chi = \frac{M_m}{E \cdot I} = \frac{F \cdot L}{4 \cdot E \cdot I}$$

Momentin tam alanı, toplam yayılı yük, Şekil 33:

$$F = \chi \cdot \frac{L}{2} = \frac{F \cdot L}{4 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2}$$

$$F = \frac{F \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I}$$

Simetriden ötürü A ve B yataklarında yatak kuvvetleri bir birine eşittir $A=B=F/2$. Şekil 33 ile:

$$\Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_B = F \cdot \frac{L}{2} - A \cdot L = 0 \quad A = F \cdot \frac{1}{2} = \frac{F \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \quad A = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$\Sigma F_V = 0 \quad w' = A \quad w' = \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I}$$

Kiriş ortasındaki moment sehmdir. Şekil 34 ile:

$$w_m = A \cdot \frac{L}{2} - w' \cdot \frac{L}{6} = w' \cdot \frac{L}{2} - w' \cdot \frac{L}{6} = w' \cdot \frac{3 \cdot L}{6} - w' \cdot \frac{L}{6} = \frac{w' \cdot L}{3} = \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{3}$$

$$w_m = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

Bu formül yukarıda bulduğumuz F 27 değerinin aynısıdır. Böylece buraya kadar yaptığımız analiz ve incelemelerin doğru olduğu görülür.

İlerde anlatılanları daha iyi ve çabuk anlamak için Şekil 33 ve Şekil 34 ile verilen sembolleri tanımlayalım.

F **kuvvet**, Kirişi zorlayan yayılı yükün kuvveti.

q* **zorlanma**, F kuvvetinin oluşturduğu moment alanının tersi zorlayan yayılı yük olarak kabul edilir:

$$q^* = -w'' = \frac{M}{E \cdot I}$$

V* **dik kuvvet**, zorlanmanın oluşturduğu dik kuvvetler olarak kabul edilir:

$$V^* = V(q^*) = w'$$

M* **eğilme momenti**, zorlanmanın oluşturduğu momentin değeri, sehmin değeri olarak kabul edilir. Mohr analogisi:

$$M^* = M(q^*) = w$$

w' **alan kuvveti**, zorlanmanın sol yarı alanı kuvvet değeri, kiriş ortası **sehim w_m yi oluşturan kuvvet** olarak kabul edilir:

$$w' = V^* = \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I}$$

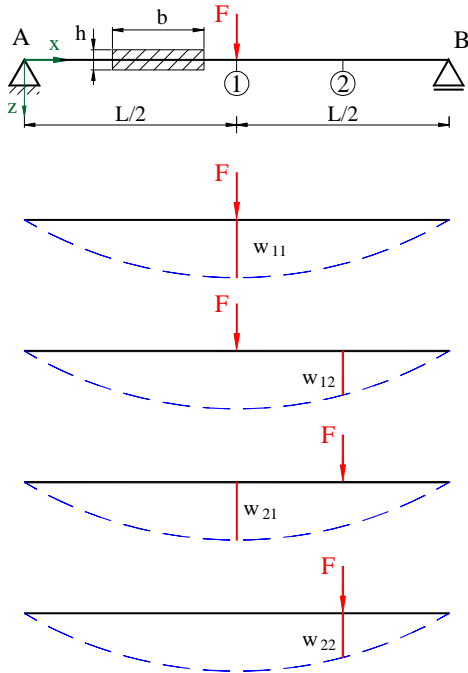
M*_m **kiriş ortası eğilme momenti**, zorlanmanın oluşturduğu kiriş ortası momentin değeri **kiriş ortası sehim w_m** olarak kabul edilir

$$M_m^* = w_m = V^* \cdot \frac{L}{3} = \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{3}$$

$$w_m = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

1.1.1.1.3. Deney ve sehimle gerilim hesabı

Buradaki deneyi derste yaptık. Değerler ölçülen değerler olup maniple edilmemiştir. Sizde kendiniz deney yapıp teori ile deneyin aynı olduğunu görebilirsiniz.



Şekil 35, Deney ve sehimle gerilim hesabı

Gerilim kontrolünü yapacak olursak:

$$\sigma = M / W$$

Moment:

Karşı koyma momenti:

Malzeme: S 235

Varyant I : F= 60 N; b = 60 mm ; h = 6 mm

Varyant II : F= 60 N; b = 60 mm ; h = 3 mm

İndekslerin tanımı:

- w₁₂ 1. indeks 1 kuvvetin etkilediği yer,
2. indeks 2 sehimin yeri.

Ölçüler:

	Var I	Var II
w ₁₁	1,39	11,2
w ₁₂	0,96	7,7
w ₂₁	7,6
w ₂₂	6,3

bu iki değer aynı olmalı

Kaba karşılaştırma:

$$w = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{F \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$$

Burada yalnız kesitin yüksekliği h_I = 6 mm, h_{II}=3 mm “ olarak değişmektedir ve oran 2 dir. Buradan 2³ = 8 olur ve 1,39x8 ≈ 1,4x8 = 11,2 yapar. Buda pratikte ölçülen değerlerin teorik değerlere eşit olduğunu gösterir.

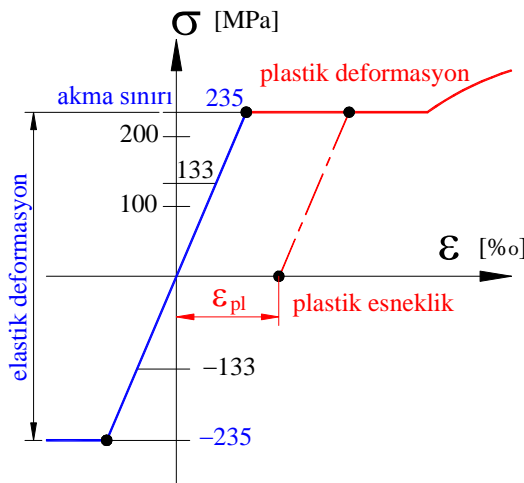
$$M = \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{F \cdot L}{4} = \frac{60 \cdot 800}{4} = 12'000 \text{ Nmm}$$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{60 \cdot 3^2}{6} = 90 \text{ mm}^3$$

Gerilim:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{12'000}{90} = \frac{400}{3} = 133 \text{ MPa}$$

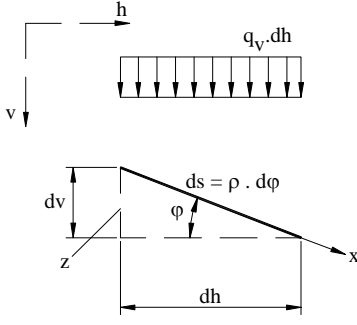
Burada S235 çeliği için akma gerilimi R_e = 235 MPa olduğundan, sistem elastik esneklik kısmında kalır.



Şekil 36, S235 Diyagramı

1.1.1.1.4. Yayılı yükü zorlanan basit kiriş için örnek

Burada $q_v = \text{sabit}$ kabul edilmiştir.



Şekil 37,

$$dh = ds \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \cos \varphi d\varphi$$

$$q_z = \frac{q_v \cdot dh \cdot \cos \varphi}{ds} = q_v \cdot \cos^2 \varphi$$

$$q_z = \frac{q_v \cdot dh \cdot \sin \varphi}{ds} = q_v \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Kavis radyusu $\rho(s)$ nin diferensiyel denklemini ele alalım:

$$\frac{d\rho}{ds} \cdot q_z + \rho \cdot \frac{dq_z}{ds} = q_x \implies \frac{d\rho}{\rho} \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = 3 \cdot \tan \varphi \cdot d\varphi$$

$$\ln \rho = -3 \cdot \ln(\cos \varphi) + k$$

Demekki:

$$\rho \cdot (\cos \varphi)^2 = \text{sabit} \implies \rho = \frac{\rho_0}{(\cos \varphi)^3}$$

Diğer taraftan;

$$\cos \varphi = \frac{dh}{\sqrt{dh^2 + dv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2}} \implies \rho = \rho_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2\right]^{3/2}$$

Diğer taraftan bildiğimiz gibi;

$$\chi = \frac{1}{-\rho} = \frac{-\frac{dv^2}{dh^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2\right]^{3/2}}$$

F 28

Yukarıda F 28 ile verilenlere göre;

$$\frac{dv^2}{dh^2} = \frac{1}{\rho_0} = \text{sabit}$$

olduğu görülür. Buda $v(h)$ fonksiyonunun ikinci dereceden parabolüdür.

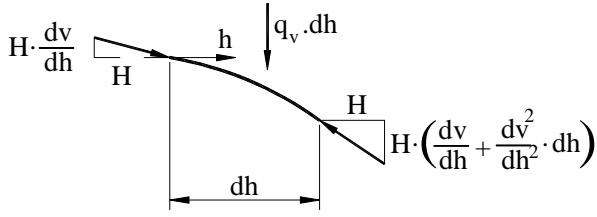
$$v = \frac{h^2}{2 \cdot \rho_0} + c_1 \cdot h + c_2$$

F 29

Eğer parabolün dönüm noktasını koordinat sisteminin çıkış noktasını kabul edersek:



$$v = \frac{h^2}{2 \cdot \rho_0}$$



Şekil 38,

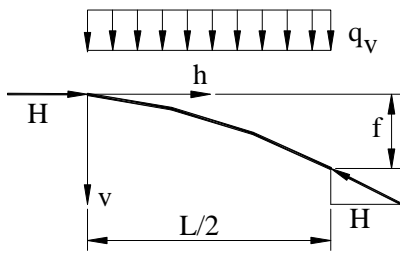
$$q_v \cdot dh = \frac{dv^2}{dh^2} \cdot dh \cdot H$$

$$\text{Buradan } v = \frac{h^2}{2 \cdot \rho_0} + c_1 \cdot h + c_2$$

Bu daha önce bulduğumuz F 29 dür ve bildiğimiz gibi:

$$\rho_0 = \frac{H}{q_v}$$

Bu sonuç $\varphi = 0$ noktasında $\rho = -N/q_z$ bulunabilir. Şöyleki: $N = -H$ ve $q_z = q_v$ olduğu için.



Şekil 39,

$$v = \frac{4 \cdot f \cdot h^2}{L^2}$$

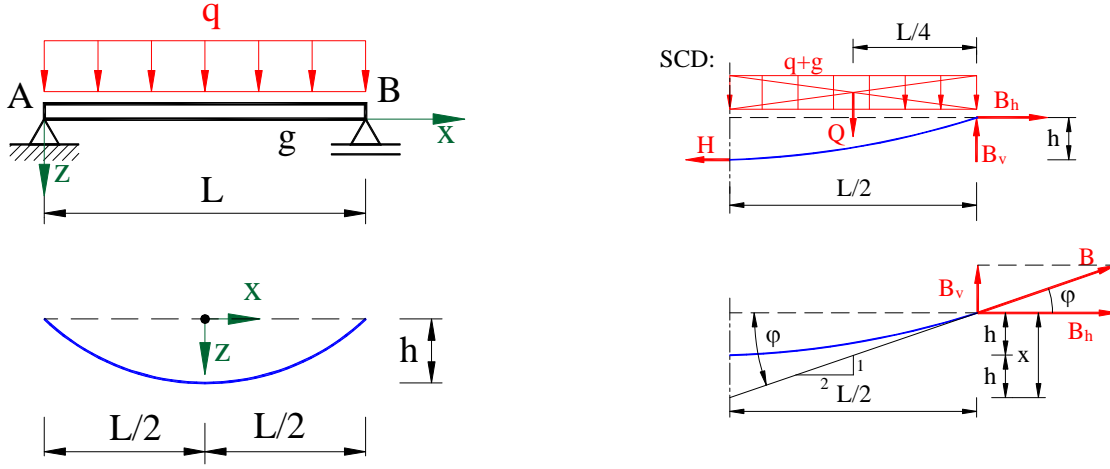
$$H = \frac{q_v \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

$$v = \frac{q_v \cdot h^2}{2 \cdot H} = \frac{4 \cdot f \cdot h^2}{L^2} \quad \text{O.K.}$$

Pratikte konstrüksiyon DÇ nin devamlı zorlamada mümkün olduğu kadar çok yakın olması için yapılır. Zorlamanın değişken olması halinde bazen az, bazen çok dik kuvvet ve eğilme momenti zorlamaları görülecektir. Bu tür zorlamaları karşılayabilmek için "Sistemi rijitleyecek" önlemler alınmalıdır.

1.1.1.1.5. Yayılı yükle zorlanan basit kirişin (halatın) maksimum boyu

Problem: Sabit yayılı yük "q" ve öz ağırlığı "g" ile zorlanan basit kirişin (halatın) boyu L ise, fonksiyonunu yaptığı sınır boyu "L₀" nekadardır?



Şekil 40, Yayılı yük ve öz ağırlıklı basit kiriş

Sehim parabolüdür.
$$z = h \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x^2}{L^2}\right)$$

$$Q = (q + g) \cdot L / 2$$

DD 1; $\Sigma M_B = 0$ $M_B = H \cdot h - Q \cdot L / 4 = H \cdot h - (q + g) \cdot L / 2 \cdot L / 4 = 0$

$$H = \frac{(q + g) \cdot L^2}{8 \cdot h}$$

Kirişin veya halatın kopmaması için yatay kuvvet $H \leq A \cdot f$ olmalıdır.

DD 2; $\Sigma F_V = 0$ $B_V - Q = 0 \Rightarrow B_V = Q$

$$B_V = \frac{(q + g) \cdot L}{2}$$

DD 3; $\Sigma F_h = 0$ $H + B_h = 0 \Rightarrow B_h = -H$

$$B_h = -\frac{(q + g) \cdot L^2}{8 \cdot h}$$

$$\tan \varphi = \frac{2 \cdot x}{L} = \frac{B_V}{B_h} \Rightarrow x = \frac{B_V \cdot L}{2 \cdot B_h}$$

$$x = \frac{(q + g) \cdot L \cdot L \cdot 8 \cdot h}{2 \cdot 2 \cdot (q + g) \cdot L^2}$$

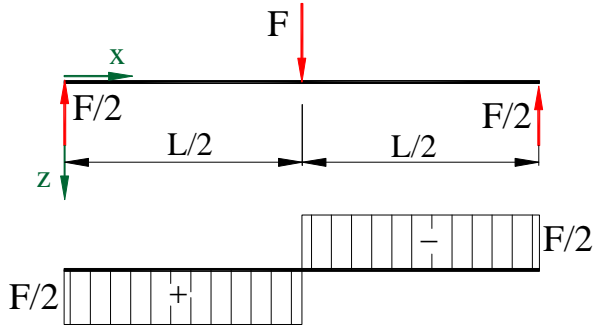
$$x = 2 \cdot h$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot h}{L/2}$$

$$h = \frac{L}{8}$$

1.1.1.1.6. Deneysel kiriş

Yukarıda sayfa 21, paragraf 1.1.1.1.3 ile verilen Deneysel ve sehimsel gerilim hesabını ele alalım:



$$F = 60 \text{ N}$$

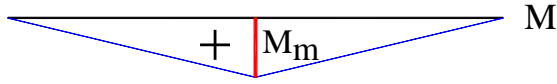
$$\Sigma M_A = 0 \quad F \cdot \frac{L}{2} - B \cdot L = 0$$

$$B = \frac{F}{2} \quad \boxed{B = 30 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad F - B - A = 0$$

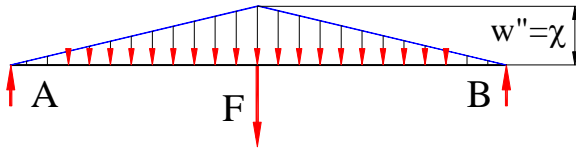
$$A = F - B = \frac{F}{2} \quad \boxed{A = 30 \text{ N}}$$

Kiriş ortasındaki moment:



$$M_m = A \cdot \frac{L}{2} = 30 \cdot 400 \quad \boxed{M_m = 12'000 \text{ Nmm}}$$

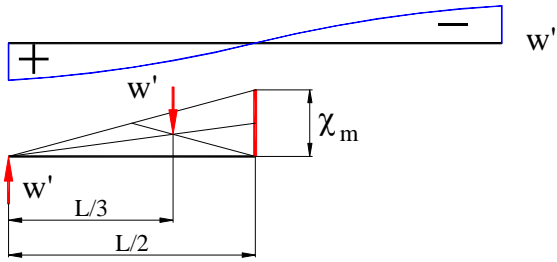
Kiriş ortasındaki kavis:



$$w'' = \chi = -\frac{M}{EI} = -\frac{12'000}{205'000 \cdot 135}$$

$$\boxed{w'' = \chi = 433,6 \text{ mrad/m}}$$

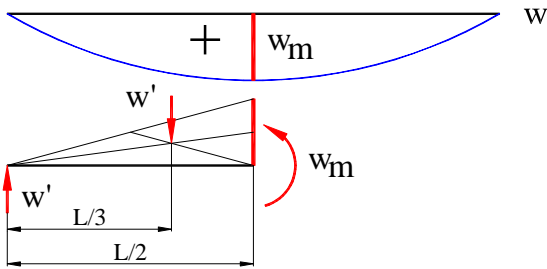
Kavisten;



$$w' = \chi_m \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = 433,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5$$

$$\boxed{w' = 86,7 \text{ mrad}}$$

Sehim;



$$w_m = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{60 \cdot 800^3}{48 \cdot 205'000 \cdot 135}$$

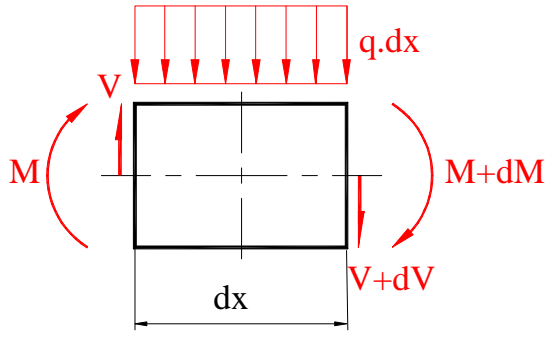
$$\boxed{w_m = 23,12 \text{ mm}}$$

$$w_m = \frac{w' \cdot L}{3} = \frac{86,7 \cdot 800}{10^3 \cdot 3}$$

$$\boxed{w_m = 23,12 \text{ mm}}$$

Şekil 41, Yayılı yükte deneysel sehimi

Şehim hesabını daha başka metotlarda yapabiliriz.



Şekil 42, Yayılı yükte deney şehimi

$$\text{DD 1: } \Sigma F_z = 0 \quad -V + q \cdot dx + V + dV = 0$$

$$q \cdot dx + dV = 0$$

$$\text{DD 2: } \Sigma M_O = 0$$

$$-M + \frac{V \cdot dx}{2} - \frac{(V + dV) \cdot dx}{2} + M + dM = 0$$

$$dM - V \cdot dx - dV \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$dV \cdot \frac{dx}{2} \text{ değeri çok küçüktür sıfır kabul edilir.}$$

Böylece:

$$q \cdot dx + dV = 0 \quad q = \frac{dV}{dx} \quad q = -V'$$

$$dM - V \cdot dx = 0 \quad V = \frac{dM}{dx} \quad V = M' \Rightarrow V' = M''$$

Buradanda.

$$q = -M'' \quad \text{veya} \quad q + M'' = 0 \quad \text{F 30}$$

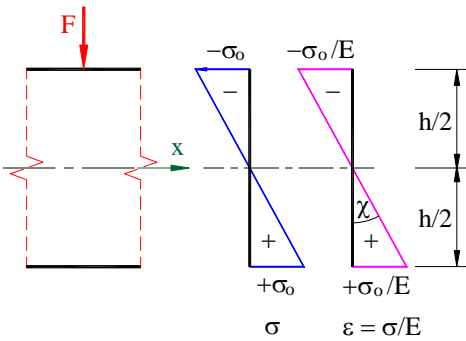
Mohr analojisi bulunur

$$w'' + \frac{M}{EI} = 0$$

$$\chi = -w'' = \frac{M}{EI} \quad \text{F 31}$$

Diferansiyel eşitlik $q = -M''$ ile $\chi = -w''$ eşitliği analogtur. Şehim de eğilme momenti gibi zorlanmalarla hesaplanabilir. M/EI Mohr analojisi.

Eğilme momentinin yayılı yük q ile hesaplamasına benzer, kavisten $M/(EI)$ şehim w hesaplanır. Buna Mohr analojisi, Mohr benzerliği denilir.



$$\tan \varphi = \chi = \frac{\varepsilon}{h/2}$$

$$\chi = \frac{2 \cdot \sigma_o}{E \cdot h}$$

$$\sigma_o = \frac{M}{W}$$

$$H = 3 \text{ mm}$$

Şekil 43, Yayılı yükte deney şehimi

Deneydeki Varyant II ye göre: $W = b \cdot h^2 / 6 = 90 \text{ mm}^3$ $I = bh^3 / 12 = 135 \text{ mm}^4$ $E = 205'000 \text{ N/mm}^2$
 $M_m = 12'000 \text{ Nmm}$ $A = 30 \text{ N}$

$$\sigma_o = \frac{M}{W} = \frac{12'000}{90}$$

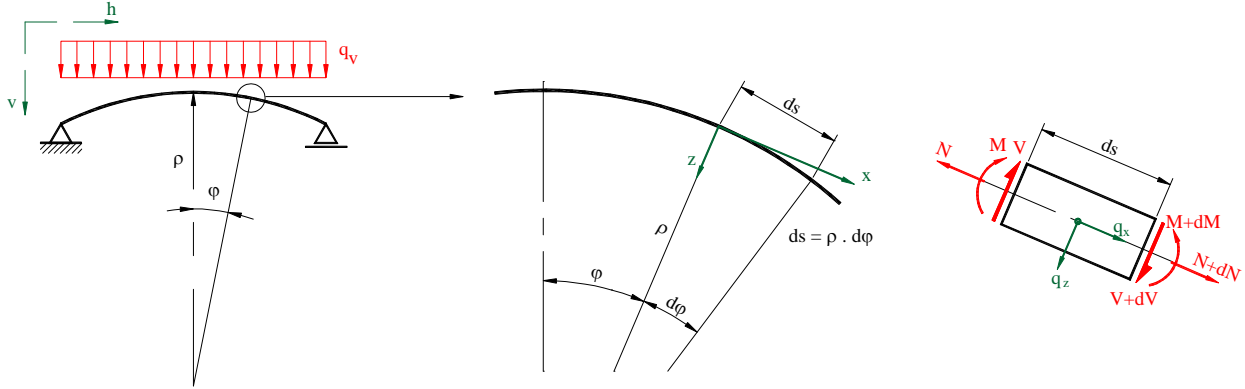
$$\sigma_o = 133,3 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{2 \cdot \sigma_o}{E \cdot h} = \frac{2 \cdot 133,3}{305'000 \cdot 3}$$

$$\chi = 433,6 \text{ mrad/m}$$

1.2.4. Kavisli çubuk

Sabit yayılı yük etkisinde bir kavisli çubuk düşünelim, Şekil 44.



Şekil 44, Kavisli çubuk

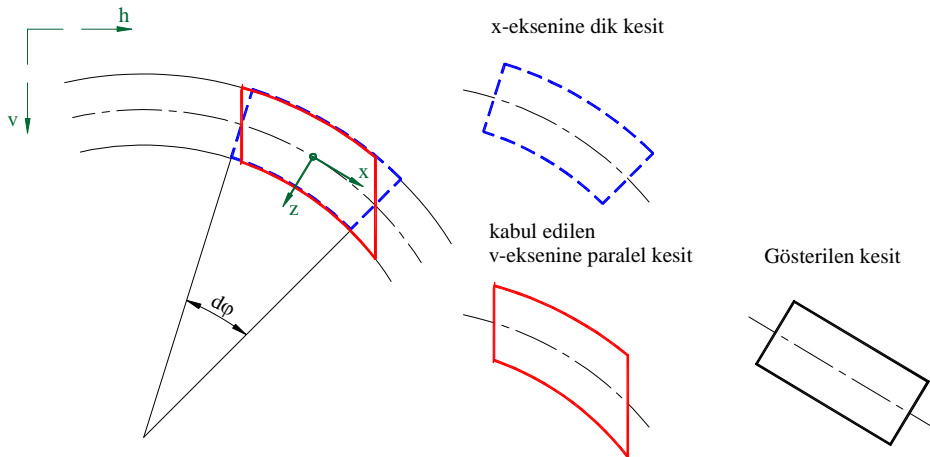
Kavisli çubuğun analizini yapmak için küçük bir parçasının kesitini Şekil 45 ile gösterildiği şekilde alalım. Her ne kadar analizde küçük parça eğik dikdörtgen olarak görülüyorsa da kesit v-eksenine paralel olarak düşünülür (Bkz. Şekil 45).

Şekil 44 ile gösterilen kavisli çubukta detaya göre denge denklemlerini yazarsak:

$$1. \text{ DD } \sum F_x = 0 \quad \boxed{dN - V \cdot d\varphi + q_x \cdot ds = 0} \quad \text{F 32}$$

$$2. \text{ DD } \sum F_z = 0 \quad \boxed{dV + N \cdot d\varphi + q_z \cdot ds = 0} \quad \text{F 33}$$

$$3. \text{ DD } \sum M_y = 0 \quad \boxed{dM - V \cdot ds = 0} \quad \text{F 34}$$



Şekil 45, Kavisli çubukta kesit

Yukarıdaki F 32, F 33 ve F 34 formüllerinden şu bağıntılar bulunur;

$$\text{F 32 ile } dN - V \cdot d\varphi + q_x \cdot ds = 0 \quad / ds$$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{V \cdot d\varphi}{ds} + \frac{q_x \cdot ds}{ds} = 0$$

$$\text{burada } ds = -R \cdot d\varphi = \frac{1}{\rho} \cdot d\varphi \quad \rho = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \text{ olduğundan}$$

$$\boxed{\frac{dN}{ds} - \frac{V}{\rho} + q_x = 0} \quad \text{F 35}$$

$$F \text{ 33 ile } dV + N \cdot d\phi + q_z \cdot ds = 0 \quad / ds$$

$$\frac{dV}{ds} + \frac{N \cdot d\phi}{ds} + \frac{q_z \cdot ds}{ds} = 0$$

$$\boxed{\frac{dV}{ds} + \frac{N}{\rho} + q_z = 0} \quad F \text{ 36}$$

$$F \text{ 34 ile } dM - V \cdot ds = 0 \quad / ds$$

$$\frac{dM}{ds} - \frac{V \cdot ds}{ds} = 0$$

$$\boxed{\frac{dM}{ds} - V = 0} \quad F \text{ 37}$$

Burada herhangi bir q_x , q_z zorlamaları verildiğinde çubuğun geometrik ölçüleri kolaylıkla bulunur. Buradaki yegane şart; Çubuğu yalnız normal kuvvet zorlayacak, dik kuvvet ve/veya eğilme momenti zorlaması olmayacak.

Burada $V=M=0$ eşit kabul edersek, şu diferensiyel denklemler bulunur.

$$\text{Formül F 35 ile } \frac{dN}{ds} + q_x = 0$$

$$\text{Formül F 36 ile } \frac{N}{\rho} + q_z = 0$$

Ve buradanda;

$$\boxed{\frac{d\rho}{ds} \cdot q_z + \rho \cdot \frac{dq_z}{ds} = q_x} \quad F \text{ 38}$$

bulunur. Bu kavis radyusu $\rho(s)$ nin diferensiyel denklemdir.

Kazan formülü bu duruma verilecek en güzel örnektir:

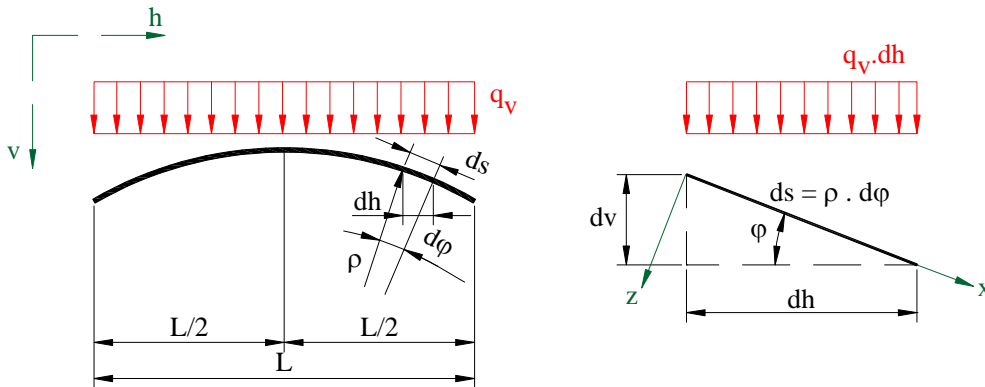
Basınçlı kazanlarda $q_x = 0$, $q_z = \text{sabit}$ vede $\rho = r = \text{sabit}$ kabul edilir;

$$\boxed{N = -q_z \cdot r = \text{sabit}} \quad F \text{ 39}$$

bulunur. Buda "**Kazan formülü**" dür.

1.2.4.1. Kavisli çubukta değerler

Buradaki yayılı dik kuvveti (q_v) sabit kabul edelim.



Şekil 46, Kavisli çubukta değerler

$$\text{Çıkış değerler, } ds = \rho \cdot d\phi \quad ; \quad dh = ds \cdot \cos \phi \quad ; \quad dh = \rho \cdot \cos \phi \cdot d\phi$$

$$F \text{ 36 } \frac{dV}{ds} + \frac{N}{\rho} + q_z = 0 \quad N = 0 \quad q_z = \frac{dV}{ds} \quad dV = q_v \cdot dh \cdot \cos \phi$$

$$q_z = \frac{q_v \cdot dh \cdot \cos \phi}{ds} = \frac{q_v \cdot ds \cdot \cos \phi \cdot \cos \phi}{ds}$$

$$\boxed{q_z = q_v \cdot \cos^2 \phi}$$

$$F \ 35 \quad \frac{dN}{ds} - \frac{V}{\rho} + q_x = 0 \quad V = 0 \quad q_x = \frac{dN}{ds} \quad dN = q_v \cdot dh \cdot \sin \varphi$$

$$q_x = \frac{q_v \cdot dh \cdot \sin \varphi}{ds} = \frac{q_v \cdot ds \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{ds} \quad \boxed{q_x = q_v \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}$$

Kavis radyusu $\rho(s)$ nin diferensiyel denklemini ele alalım:

$$\frac{d\rho}{ds} \cdot q_z + \rho \cdot \frac{dq_z}{ds} = q_x \quad \implies \quad \frac{d\rho}{\rho} \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = 3 \cdot \tan \varphi \cdot d\varphi$$

$$\ln \rho = -3 \cdot \ln(\cos \varphi) + k$$

Demekki: $\rho \cdot (\cos \varphi)^3 = \text{sabit} \implies \rho = \frac{\rho_0}{(\cos \varphi)^3}$

Diğer taraftan; $\cos \varphi = \frac{dh}{\sqrt{dh^2 + dv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2}} \implies \rho = \rho_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2\right]^{3/2}$

Diğer taraftan bildiğimiz gibi;

$$\chi = \frac{1}{-\rho} = \frac{-\frac{dv^2}{dh^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2\right]^{3/2}}$$

F 40

Yukarıda F 40 ile verilenlere göre;

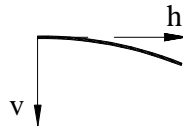
$$\frac{dv^2}{dh^2} = \frac{1}{\rho_0} = \text{sabit}$$

olduğu görülür. Buda $v(h)$ fonksiyonunun ikinci dereceden parabolüdür.

$$v = \frac{h^2}{2 \cdot \rho_0} + c_1 \cdot h + c_2$$

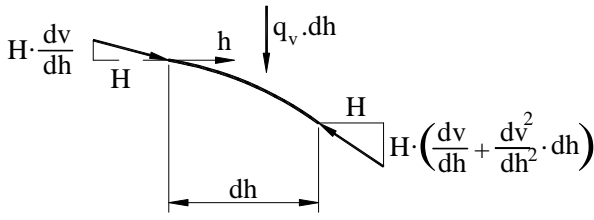
F 41

Eğer parabolün dönüm noktasını koordinat sisteminin çıkış noktasını kabul edersek:



$$v = \frac{h^2}{2 \cdot \rho_0}$$

Şekil 47, Parabolün dönüm noktası



Şekil 48, Kavisli çubukta sektör

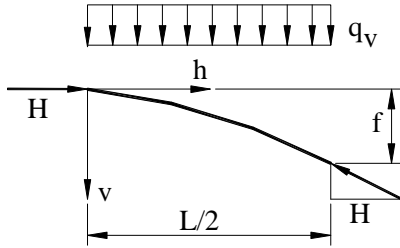
$$q_v \cdot dh = \frac{dv^2}{dh^2} \cdot dh \cdot H$$

$$\text{Buradan } v = \frac{h^2}{2 \cdot \rho_0} + c_1 \cdot h + c_2$$

Bu daha önce bulduğumuz dür ve bildiğimiz

$$\text{gibi: } \rho_0 = \frac{H}{q_v}$$

Bu sonuç $\varphi = 0$ noktasında $\rho = -N/q_z$ bulunabilir. Şöyleki: $N = -H$ ve $q_z = q_v$ olduğu için.



Şekil 49, Kavisli çubukta yük

$$v = \frac{4 \cdot f \cdot h^2}{L^2}$$

$$H = \frac{q_v \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

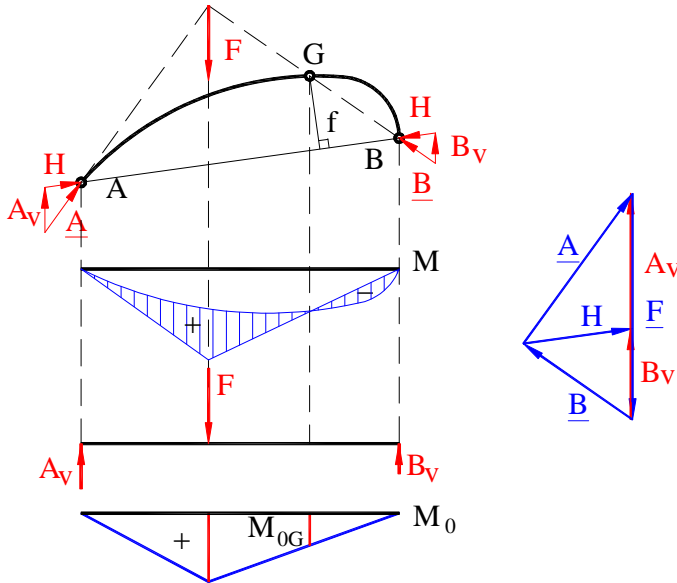
$$v = \frac{q_v \cdot h^2}{2 \cdot H} = \frac{4 \cdot f \cdot h^2}{L^2} \quad \text{O.K.}$$

Sayısal uygulama örneği;

$$L=200 \text{ m} \quad ; \quad f=40 \text{ m} \quad ; \quad q_v=1 \text{ MN/m} \quad ; \quad H = \frac{q_v \cdot L^2}{8 \cdot f} = \frac{1 \cdot 200^2}{8 \cdot 40} \implies H = 125 \text{ MN}$$

Pratikte konstrüksiyon DÇ nin devamlı zorlamada mümkün olduğu kadar çok yakın olması için yapılır. Zorlamanın değişken olması halinde bazen az, bazen çok dik kuvvet ve eğilme momenti zorlamaları görülecektir. Bu tür zorlamaları karşılayabilmek için "Sistemi rijitleyecek" önlemler alınmalıdır.

1.2.4.2. Dik kuvvet etkisinde üç oynaklı kemer



Şekil 50, Üç oynaklı kemer

Burada Şekil 50 ile görülen üç oynaklı kemerde A ve B yataklarındaki A_v ve B_v kuvvetleri, basit kiriş hesabı gibi yapılarak \underline{A} ve \underline{B} reaksiyon kuvvetlerinden bulunur.

Kuvvetler üçgeninin bağlantı hattından "Kämpfer oynacı" ile A ve B yatakları arasındaki "Kemer çekmesi" H bulunur.

Kemerdeki eğilme momenti M, basit kirişte olduğu gibi momentlerin süper pozisyonu ile (M_0) ve $-H \cdot \eta$ momentide kemer çekmesiyle bulunur.

$$M = M_0 - H \cdot \eta(\xi)$$

Orta oynak yatak G de moment sıfır olduğu için "M=0"

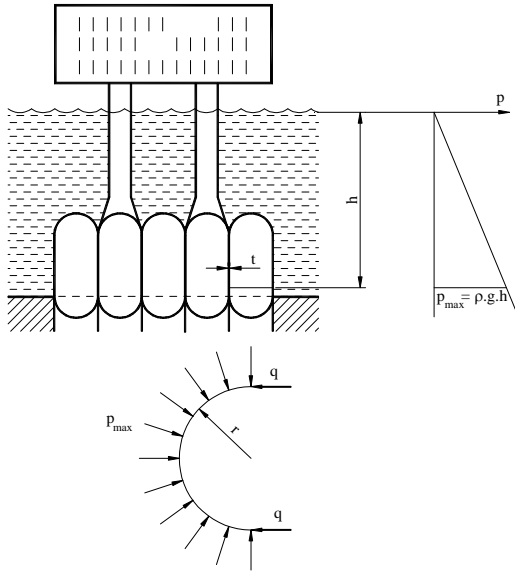
$$H = \frac{M_{0G}}{f}$$

Burada kirişin kemer şeklinde olması momentlerin basit kiriş momentleriyle karşılaştırılmalarında kemer momentlerinin çok daha küçük olduğu görülür.

2. Sayısal örnekler

2.1. Denizde petrol platformu

Petrol arama platformunun 150 m derinlikteki silindir şeklindeki dip tanklarında (Şekil 51);



$$\text{Suyun özgül ağırlığı} \quad \rho \approx 1030 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Yer çekimi ivmesi} \quad g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{Hesabın yapıldığı derinlik} \quad h = 150 \text{ m}$$

$$p_{\max} = \rho \cdot g \cdot h = 1,516 \text{ N/mm}^2 \text{ (MN/m}^2\text{)}$$

$$q_{\max} = \rho \cdot g \cdot h \cdot r = 18,2 \text{ MN/m}$$

Silindirin cidar kalınlığı 0,8 m kabul edilirse, ortalama bası gerilimi 22,7 MPa bulunur.

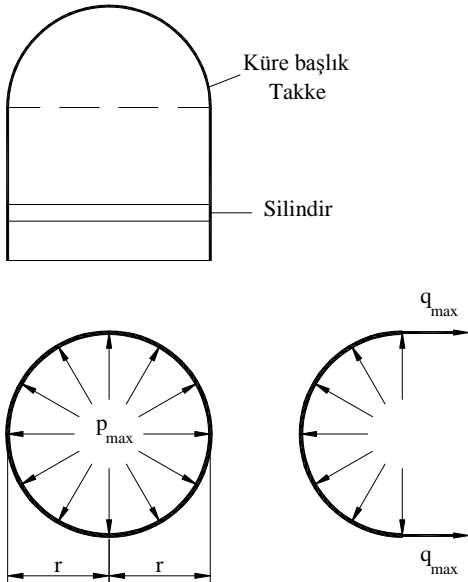
$$\sigma_d = q_{\max} / t$$

$$\sigma_d = 18,2 / 0,8 = 22,7 \text{ MN/m}^2 \text{ (N/mm}^2 \text{ , MPa)}$$

Şekil 51, Petrol arama platformu dip tankları

2.2. Atom santrali koruyucu gömleği

Silindir şeklinde atom santrali koruyucu gömleğinin iç basıncı $p_{\max} = 0,5 \text{ N/mm}^2$ olarak kabul edilmiştir (Şekil 52).



Şekil 52, Atom santrali koruyucu gömleği

$$\text{Silindirin yarı çapı} \quad r = 20 \text{ m}$$

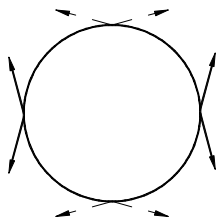
Silindirin çevresinde şu çekme kuvvetleri oluşur:

$$q_{\max} = r \cdot p_{\max} = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ NN/m}$$

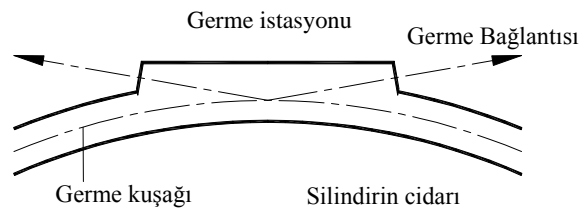
Bu kuvvetler ön gerilimli beton konstrüksiyon tarafından karşılanır.

Çekmeye zorlanan germe parçaları betona öyle büyük baskı yaparlarki, betonda çekme gerilimi oluşamaz ve çekme geriliminin doğuracağı çatlaklarda.

Ön gerilim oluşturacak konstrüksiyon kabaca Şekil 53 ve Şekil 54 ile gösterilmiştir.



Şekil 53, Ön gerilim konstrüksiyonu, prensip



Şekil 54, Ön gerilim konstrüksiyonu, kaba detay

Konu İndeksi

A		I	
Atalet momenti	16	İçten Statik Belirsiz	4
C		K	
Cisim kesiti	3	Karşıkoyma momenti	15
D		Kavis	15
Denge kuralı	3	Kavis radyosu	16
Dıştan Statik Belirli	4	Kazan formülü	28
Düname	4	S	
E		Sağ cıvata kuralı	3
Eğilme momenti	7	Sağ el kuralı	3
Elastiklik modülü	9	Serbest Cisim Diyagramı	3
Eylemsizlik momenti	16	Statik Belirli Sistem	4
H		V	
Hook kanunları	9	Vektör	3